UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

Sobre um problema de valor de fronteira para equações da onda

Thiago de Jesus Filho

Profa. Giovana Siracusa Gouveia
Orientadora

São Cristóvão-SE
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

Sobre um problema de valor de fronteira para equações da onda

por

Thiago de Jesus Filho

Dissertação a ser apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFS, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Profa . Giovana Siracusa Gouveia
Orientadora

São Cristóvão-SE
2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

J58s

Jesus Filho, Thiago de
Sobre um problema de valor de fronteira para equações da onda / Thiago de Jesus Filho ; orientadora Giovana Siracusa Gouveia. – São Cristóvão, 2016.
64 f. : il.

Dissertação (mestrado acadêmico em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2016.

1. Matemática. 2. Método Faedo-Galerkin. 3. Equações de onda. 4. Espaço de Sobolev. 5. Teoria de traço. I. Gouveia, Giovana Siracusa, orient. II. Título

CDU: 514.75

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Sobre um Problema de Valor de Fronteira para Equações da Onda

por

Thiago de Jesus Filho

Aprovada pela banca examinadora:

Giovana Siracusa Gouveia
Prof. Drª. Giovana Siracusa Gouveia - UFS
Orientador

Bruno de Andrade
Prof. Dr. Bruno Luis de Andrade Santos - UFS
Primeiro Examinador

Aldo Trajano Lourêdo
Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo - UEPB
Segundo Examinador

São Cristóvão, 21 de Março de 2016

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Agradecimentos

Ao departamento de matemática da Universidade Federal de Sergipe-UFS, pelo apoio a minha participação no mestrado.

A minha orientadora, Professora Dra. Giovana Siracusa Gouveia, pela confiança demonstrada, além de sua dedicação, amizade e competência.

Ao professor Dr. Aldo Trajano, que foi crucial, desde a escolha do artigo até a conclusão do mesmo.

Ao professor Dr.Bruno Luiz de Andrade Santos por disponibilizar seu tempo em ler minha dissertação.

A todos os professores da graduação e da pós-graduação em especial ao professor Dr. Valdenberg Araujo da Silva que contribuiu de forma significativa na minha formação acadêmica.

Aos meus pais e irmãos pelo amor, carinho e incentivo.

Por fim, aos meus amigos de forma geral, em especial a Amanda Maynart.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a existência e unicidade de soluções de um problema de valor de fronteira para equações da onda não homogênea. Usaremos o método de Faedo-Galerkin para garantir a existência de soluções e também provaremos o decaimento exponencial da solução do problema.

Palavras-chave: Método de Faedo-Galerkin, Equações de onda, Espaço de sobolev, Teoria do traço.

Abstract

In this work we study the existence and uniqueness of solutions of a boundary value problem for equations of non-homogeneous wave. We will use the Faedo - Galerkin method to ensure the existence of solutions and also prove the exponential decay of the solution.

Keywords: Faedo - Galerkin method, Wave equation, Sobolev spaces, Trace theory.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudaremos o problema que consiste em encontrar uma função $u : \Omega \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

$$\left| \begin{array}{l} u''(x,t) - \mu(t)\Delta u(x,t) = 0 \text{ sobre } \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ \mu(t)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \delta(x)u'(x,t) = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u'(x,0) = u_1(x) \text{ sobre } \Omega, \end{array} \right. \tag{1}$$

onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe C^2, $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ é uma partição de Γ, ambas com medida positiva e $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$. A função real $\delta = \delta(x)$ pertence a $W^{1,\infty}(\Gamma_1)$, onde $\delta(x) \geq \delta_0 > 0$ sobre Γ_1, e $\mu = \mu(t)$ é a solução pertencente a $W^{1,\infty}_{loc}(0,\infty)$, tal que $\mu(t) \geq \mu_0 > 0$.

Para encontrarmos tal função, construíremos uma base que auxiliará no uso do método de Galerkin provando a existência de soluções forte e a partir desse resultado, mostraremos a existência de solução. fraca e unicidade de solução Além disso, dado $\mu' \in L^1(0, +\infty)$ se considerarmos $\mu' \leq 0$ quase sempre em $[0, +\infty)$, demonstraremos o decaimento exponencial da energia quando t tende ao infinito.

A dissertação está dividida em seis capítulos, consistindo da seguinte estrutura:

Nos capítulos 1 e 2, apresentaremos a terminologia dos espaços que utilizaremos neste trabalho e alguns resultados básicos necessários nas demonstrações dos principais teoremas, dando ênfase a proposição 2.4 a qual nos dará condições necessárias para a construção de uma base especial para os espaços nos quais tomamos os dados iniciais.

No capítulo 3, demonstraremos a existência de soluções fortes do problema (1). Para isto, usaremos a proposição 2.4 afim de construir uma base especial que auxiliará na aplicação do método de Galerkin. O método de Galerkin consiste em três etapas, que apresentaremos a seguir:

Etapa 1. Encontrar soluções aproximadas para o problema em dimensão finita;

Para encontrarmos tais soluções, na aplicação do Método de Galerkin, necessitamos usar um Teorema de existência de solução em EDO. Consideremos o problema de valor inicial descrito por.

$$\left| \begin{array}{l} Y'(t) = f(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y_0 \end{array} \right. \tag{2}$$

Considerando a função f sendo contínua (ou Lipschtz), o teorema de Peano (ou Picard), garante a existência de solução para o problema (2).

Porém, a função que aparece no problema do valor inicial (3.13) não é contínua e nem lipschtiziana, mas satisfaz as condições de Carathéodory e portanto o teorema utilizado para garantir a existência de solução de (2) foi o teorema de Carathéodory.

Etapa 2. Estimativas a priori das soluções aproximadas;

Nesta etapa, usaremos a desigualdade de Gronwall afim de obter condições necessárias para garantir a extensão da solução local a um intervalo $[0, T]$, $\forall T > 0$ fazendo uso do teorema de prolongamento de soluções.

Etapa 3. Passagem ao limite das soluções aproximadas.

Nesta etapa, inicialmente mostramos que fixando k, a sequência de soluções u_{km} do problema aproximado (3.9) converge fraco estrela para u_k em $L^\infty_{loc}(0, \infty; V)$ em seguida mostramos que a sequência u_k converge fraco estrela para uma função u em $L^\infty_{loc}(0, \infty; V)$ que mostraremos ser a solução forte do problema (1).

No capítulo 4, consideraremos o problema 1 com dados iniciais enfraquecidos e mostramos a existência de solução fraca como limite das soluções forte. Aproximaremos os dados u_0 e u_1 por sequências de vetores de $V \cap H^2(\Omega)$ e V e aplicando resultados de soluções fortes obtidas no capítulo 3. Além disso, mostraremos a unicidade das soluções usando o método de Lions-Magenes e Visik-ladyzhenshaya.

No capítulo 5, demonstraremos o decaimento exponencial da energia quando t tende ao infinito. Para isto, usaremos o método da pertubação visto em Kormonik-Zuazua.

O capítulo 6 será o apêndice deste trabalho destinado a resultados importantes apresentados sem teoria, com intuito de não estender em demasiado esta dissertação. Em cada capítulo anterior os resultados do apêndice (capítulo 6) que forem utilizados terão sua numeração citada ao menos uma vez em cada capítulo.

Capítulo 1

Preliminares

Com o objetivo de facilitar a leitura da dissertação, estaremos apresentando neste capítulo e no apêndice, definições e resultados que aparecem nos capítulos seguintes.

1.1 Definições iniciais

Denotaremos por $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou corpo dos números complexos $\mathbb{C}$, e por $\mathbb{R}^n_+$ ao conjunto $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$. Dado $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ define-se

$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $x^\alpha = x^{\alpha_1} + ... + x^{\alpha_n}$. E denotaremos por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} ... \partial {x_n}^{\alpha_n}}.$$

O operador derivação de ordem α, onde para $\alpha = (0, ..., 0)$ é definido por $D^\alpha u = u$. Por D_i representaremos a derivação parcial $\frac{\partial}{\partial x_i}$, onde $i = 1, ..., n$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua, denomina-se suporte e denota-se por $supp(u)$ ao fecho do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$ em Ω.

Representa-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço das funções numéricas definida em Ω com suporte compacto, possuindo em Ω derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Os elementos em $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções teste em Ω.

Proposição 1.1. *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Para demonstração ver [2], página 22. □

Definição 1.1. *Diz-se que uma sequência* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $C_0^\infty(\Omega)$ *é convergente para zero, quando as seguintes condições forem satisfeitas:*
a) Existe um compacto K *de* Ω *tal que, supp*$(\varphi_n) \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}^n$*;*
b) Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$*, a sequência* $(D^\alpha \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para zero.*

Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ diz-se que a sequência (φ_n) de elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando $(\varphi_n - \varphi)$ converge para zero no sentido da definição 1.1.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com esta noção de convergência é denominado espaço das funções testes, denotado por $D(\Omega)$.

Uma distribuição sobre Ω é um funcional linear sobre $D(\Omega)$ que é contínuo no sentido da definição 1.1, isto é, se $(\varphi_n) \subset D(\Omega)$ converge para zero no sentido da definição 1.1, então $\langle T, \varphi_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathbb{K}$.

Lema 1.1 (Du Bois Raymond)**.** *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \ \forall \ \varphi \in D(\Omega).$$

Então, $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Demonstração. Para demonstração ver [2], página 17. □

Definição 1.2. *Sejam* T *uma distribuição sobre* Ω *e* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*. A derivada* $D^\alpha T$ *de ordem* α *de* T *é dada por:*

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle,$$

$\forall \varphi \in D(\Omega)$.
Além disso, $D^\alpha T$ *é uma distribuição sobre* Ω.

Definição 1.3. *Dada uma função* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *define-se a transformada de Fourier de f, denotando por* $\hat{f}$*, a uma função definida sobre o* $\mathbb{R}^n$ *pela fórmula*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle \xi, x\rangle} f(x)dx,$$

onde $\langle \xi, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i$ *é o produto interno usual em* $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.4. *O espaço de Schwartz ou espaço das funções rapidamente decrescente no infinito, que denotaremos por* $\mathbb{S}$, *é o subespaço vetorial formado pelas funções* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *tais que* $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \|x\|^k D^\alpha \varphi(x) = 0$, *qualquer que seja* $k \in \mathbb{N}$ *e* $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Definição 1.5. *Um funcional linear* T *definido e contínuo sobre* $\mathbb{S}$ *é denominado uma distribuição temperada (ou lentamente crescente). A totalidade das distribuições temperadas, ou seja, o espaço vetorial dos funcionais lineares e contínuos sobre* $\mathbb{S}$ *é denotado por* $\mathbb{S}'$.

1.2 Espaço de Sobolev

Introdução

Definição 1.6. *Seja* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$ *e dado* $m > 0$ *definimos por espaço de Sobolev e denotamos por* $W^{m,p}(\Omega)$, *ao espaço vetorial de todas as funções* u *pertencentes a* $L^p(\Omega)$ *tal que* $D^\alpha u$ *pertence a* $L^p(\Omega)$, *onde* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $|\alpha| \leq m$, *isto é,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, *definimos a norma de* u *pondo*

$$\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx,$$

quando $1 \leq p < \infty$, *e*

$$\|u\|^p_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} ess|D^\alpha u(x)|^p,$$

quando $p = \infty$.

No caso particular em que $p = 2$, escrevemos $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$. O espaço $H^m(\Omega)$ em particular é um espaço de Hilbert (ver [2], página 78) com produto escalar dado por

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \tag{1.1}$$

para todo $u, v \in H^m(\Omega)$,e é denominado espaço de Sobolev de ordem m.

Quando $m = 0$ tem-se $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Definimos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ ao fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, $H_0^{m,p}(\Omega)$ ao fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$. Suponha $1 \leq q \leq \infty$ tal que q seja conjugado de p, representaremos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Consideremos o seguinte espaço:

$$\{u \in \mathbb{S}'(\mathbb{R}^n); (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{\mathrm{u}} \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

munido do produto interno

$$(((u,v))) = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^m \hat{\mathrm{u}}(x) \overline{\hat{\mathrm{v}}(x)} dx = \left((1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{\mathrm{u}}, (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{\mathrm{v}}\right)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.2}$$

Proposição 1.2. *Para todo* $m \in \mathbb{N}$, *temos:*

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathbb{S}'(\mathbb{R}^n); (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Além disso, as norma $\|.\|_m$ *e* $|||.|||$ *provenientes dos produtos internos dados em (1.1) e (1.2) são equivalentes.*

Demonstração. Para demonstração, ver [2], página 242. □

Da proposição acima podemos definir para $s \in \mathbb{R},\ s \geq 0$:

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathbb{S}'(\mathbb{R}^n); (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{\mathrm{u}} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

munido com o produto interno

$$((u,v)))_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^s \hat{\mathrm{u}}(x) \overline{\hat{\mathrm{v}}(x)} dx.$$

1.3 Teoria do traço

Diremos que o aberto Ω é bem regular se sua fronteira Γ é uma variedade de classe C^∞ de dimensão $n-1$, Ω estando localmente do mesmo lado de Γ.

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ. Nesta seção estudaremos a aplicação traço de ordem zero no caso em que $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ e no caso quando Ω for um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. E por fim, definiremos o traço de ordem m.

Caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$

Seja $\varphi \in D(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Definamos,

$$\begin{aligned} \varphi(t) : \mathbb{R}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x' &\longmapsto \varphi(t)(x') = \varphi(x', t), \forall\, t \geq 0. \end{aligned}$$

Afirmamos que para cada $t \geq 0$, $\varphi(t) \in D(\mathbb{R}^{n-1})$.

Demonstração. Para demonstração ver [2], página 287. □

Desta forma, podemos definir a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \gamma : D(\overline{\mathbb{R}^n_+}) &\longrightarrow D(\mathbb{R}^{n-1}) \\ \varphi &\longmapsto \gamma\varphi = \varphi(0), \end{aligned}$$

onde $\varphi(0) = \varphi|_{\mathbb{R}^{n-1}}$.

Proposição 1.3. *Para todo $\varphi \in D(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, temos:*

$$\|\gamma\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}$$

Demonstração. Para demonstração ver [2], página 288. □

Pelo fato de $D(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ ser denso em $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ (ver [2], página 180) e pela proposição 1.2, podemos estender a aplicação γ, a uma única aplicação linear e contínua:

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\mathbb{R}^n_+) &\longrightarrow H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u &\longmapsto \gamma_0 u, \end{aligned}$$

tal que

$$\gamma_0\varphi = \varphi|_{\mathbb{R}^{n-1}} = \varphi(0);\ \forall\ \varphi \in D(\overline{\mathbb{R}^n_+}).$$

A aplicação acima é chamada de traço de ordem zero.

Proposição 1.4. *A aplicação $\gamma_0 : H^1(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ é sobrejetiva.*

Demonstração. Para demonstração ver [2], página 299. □

Proposição 1.5. *Seja $\gamma_0 : H^1(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, então $Ker(\gamma_0) = H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$.*

Demonstração. Para demonstração ver [2], página 309. □

Caso Aberto Limitado com Fronteira Bem Regular

Usando cartas locais, o fato de $D(\overline{\Omega})$ ser denso em $H^1(\Omega)$ (ver [2], página 315) e construindo de maneira semelhante a anterior poderemos definir a aplicação linear e contínua:

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

tal que

$$\gamma_0 u = u|_\Gamma,$$

denominada aplicação traço de ordem zero de u sobre Γ.

Proposição 1.6. *Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ bem regular. A aplicação traço $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ é sobrejetiva e além disso*

$$Ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega).$$

Demonstração. Para demonstração ver [2], página 336. □

Traço de Ordem m de uma Função de $H^m(\Omega)$

Teorema 1.1. ***(Teorema do Traço)*** *Existe uma única aplicação linear e contínua:*

$$\begin{aligned} \gamma : H^m(\Omega) \quad &\longrightarrow \quad \prod_{j=0}^{n} H^{m-j-1/2}(\Gamma) \\ u \quad &\longmapsto \quad \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, ..., \gamma_{m-1} u) \end{aligned}$$

Quando munimos o espaço $\prod_{j=0}^{n} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$ da topologia dada por:

$$\|w\|_{\prod_{j=0}^{n} H^{m-j-1/2}(\Gamma)} = \sum_{j=0}^{m-1} \|w_j\|_{H^{m-j-1/2}(\Gamma)}$$

tal que

$$\gamma\xi = \left(\xi|_\Gamma, \frac{\partial \xi}{\partial \nu}\bigg|_\Gamma, ..., \frac{\partial^{m-1}\xi}{\partial \nu^{m-1}}\bigg|_\Gamma \right); \forall\ \xi \in D(\overline{\Omega}).$$

Demonstração. Para demonstração ver [2], página 387. □

Observação 1.1. *A aplicação γ acima é denominada aplicação traço de ordem m.*

Da mesma forma que forma que foi feito para $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ prova-se que

$$Ker(\gamma_0) = H_0^m(\Omega).$$

Observação 1.2. *Na demonstração do Teorema 1.1 prova-se que γ admite uma inversa a direita linear e contínua, e portanto γ é sobrejetiva.*

Capítulo 2

Resultados básicos

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe C^2. Representaremos por Γ_0 e Γ_1 a uma partição de Γ, ambas com medida positiva e $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$.

Consideremos a função real $\delta = \delta(x)$ pertencente ao espaço $W^{1,\infty}(\Gamma_1)$, onde $\delta(x) \geq \delta_0 > 0$ sobre Γ_1. E por $\mu = \mu(t)$ representaremos as funções pertencente ao espaço $W^{1,\infty}_{loc}(0, \infty)$, tal que $\mu(t) \geq \mu_0 > 0$.

Definimos o subespaço V de $H^1(\Omega)$, por:

$$V = \{v \in H^1(\Omega); \gamma_0 v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}$$

Segue-se que V é um subespaço Hilbert de $H^1(\Omega)$. Com efeito, como γ_0 é contínua V é fechado, e pelo fato do fecho de um subespaço de Hilbert ser um espaço de Hilbert, o resultado segue. O produto interno e a norma em $L^2(\Omega)$ serão representados por $(.,.)$ e $|.|$, respectivamente.

Pela desigualdade de Poincaré (proposição 7.1), a norma do gradiente

$$\|v\|^2 = \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx$$

e a norma em $H^1(\Omega)$ são equivalentes em V. E portanto, temos o seguinte produto interno:

$$((u, v)) = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x) dx.$$

A demonstração do próximo resultado foi baseada na demonstração do Lema 1.7.1, página 27 de [18].

Proposição 2.1. *Dados $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, existe uma única solução $u \in V \cap H^1(\Omega)$ do seguinte problema:*

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = f \ \text{em } \Omega, \\ u = 0 \ \text{sobre } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g \ \text{sobre } \Gamma_1. \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Demonstração. Seja $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear coerciva e contínua definida por:

$$a(u, v) = ((u, v)), \forall v \in V.$$

E seja $L : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle L, v \rangle = (f, v) + \int_{\Gamma_1} gvd\Gamma, \ \forall v \in V.$$

Temos que L é linear e contínua sobre V. Com efeito,

i) L é linear

Sejam $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos que,

$$\begin{aligned} \langle L, \alpha u + v \rangle &= (f, \alpha u + v) + \int_{\Gamma_1} g(\alpha u + v)d\Gamma \\ &= \alpha \left((f, u) + \int_{\Gamma_1} gud\Gamma \right) + \left((f, v) + \int_{\Gamma_1} gvd\Gamma \right) \\ &= \alpha \langle L, u \rangle + \langle L, v \rangle \end{aligned}$$

ii) L é contínua

Pelas desigualdades de Cauchy-Schwartz (teorema 7.5), Hölder (proposição 7.2) e pela imersão contínua $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$, e considerando as igualdades abaixo,

$$V = \{v \in H^1(\Omega); \gamma_0 v = 0\} = Ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}_{H^1(\Omega)} \hookrightarrow \overline{C_0^\infty(\Omega)}_{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega),$$

sendo C_1 a constante de imersão (a ultima igualdade e proveniente da proposição 1.1), obtemos que,

$$|\langle L, v \rangle| \leq |f||v| + \|g\|_{L^2(\Gamma_1)}\|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq C_1|f|\|v\|_V + \|g\|_{L^2(\Gamma_1)}\|v\|_{L^2(\Gamma_1)}.$$

Considerando, $H^{1/2}(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$, com constante de imersão C_2 (ver [2], página 402) obtemos,

$$|\langle L, v \rangle| \leq C_1|f|\|v\|_V + C_2\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}$$

Além disso, pelo Teorema do traço 1.1

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} = \|\gamma_0 v\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \leq C_3\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|\langle L, v\rangle| &\leq C_1|f|\|v\|_V + C_2\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \\
&\leq C_1|f|\|v\|_V + C_2C_3\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}\|v\|_{H^1(\Omega_1)} \\
&\leq C_1|f|\|v\|_V + C_2C_3\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}\|v\|_V \\
&= C\|v\|_V,
\end{aligned}$$

onde $C = C_1|f| + C_2C_3\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}$.

Pelo lema de Lax-Milgran (lema 7.1), existe um único $v \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha(u, v) = \langle L, u\rangle, \text{ isto é, } ((u, v)) = \langle L, u\rangle$$

Assim,

$$((u, v)) = (f, v) + \int_{\Gamma_1} gvd\Gamma, \ \forall v \in V \tag{2.2}$$

Para todo $\varphi \in D(\Omega)$ teremos que,

$$((u, \varphi)) = (f, \varphi) + \int_{\Gamma_1} g\varphi d\Gamma = (f, \varphi) = \int_\Omega g(x)\varphi(x)dx,$$

pois $\varphi = 0$ em Γ_1. E como

$$((u, \varphi)) = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla\varphi(x)dx, \tag{2.3}$$

Obtemos,

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega g(x)\varphi(x)dx$$

Pela Segunda fórmula de Green generalizada (proposição 7.3), obtemos que

$$-\int_\Omega \Delta u\varphi dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\varphi d\Gamma = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega g(x)\varphi(x)dx.$$

Logo, $(-\Delta u, \varphi) = (f, \varphi)$ $\forall \varphi \in D(\Omega)$, e como $D(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$ então, $(-\Delta u, v) = (f, v)$, $\forall v \in L^2(\Omega)$ e portanto, $-\Delta u = f$. Pelo lema de Du Bois Raymond (Lema 1.1), $-\Delta u = f$ qtp em Ω.

Por regularidade elíptica, $u \in V \cap H^2(\Omega)$ e portanto $\Delta u \in L^2(\Omega)$, logo usando a segunda fórmula generalizada de Green e as equações (2.2) e (2.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_1)\times H^{1/2}(\Gamma_1)} &= (\Delta u, v) + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\
&= (\Delta u, v) + ((u,v)) \\
&= (\Delta u, v) + (f,v) + \int_{\Gamma_1} g v d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_1} g v d\Gamma
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_1)\times H^{1/2}(\Omega)} = \int_{\Gamma_1} g v d\Gamma$$

Pelo teorema da representação de Riesz (teorema 7.1),

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_1)\times H^{1/2}(\Omega)} = \langle g, v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_1)\times H^{1/2}(\Gamma_1)}. \text{ Logo, } \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ em } H^{-1/2}(\Gamma_1)$$

e pela unicidade do teorema da representação de Riesz $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ em $H^{1/2}(\Gamma_1)$, o que prova o resultado. □

Proposição 2.2. *Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. Então a solução do problema*

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ sobre } \Gamma_1, \end{array} \right. \tag{2.4}$$

pertence a $V \cap H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \le c[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}]$.

Demonstração. Seja $\{0, \overline{g}\} \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ definido por

$$\overline{g} = \begin{cases} g \text{ sobre } \Gamma_1, \\ 0 \text{ sobre } \Gamma_0. \end{cases}$$

Pelo Teorema do traço e pela observação 1.2, concluimos que γ é sobrejetiva.

E portanto, existe $h \in H^2(\Omega)$ tal que, $\gamma(h) = (\gamma_0(h), \gamma_1(h)) = (0, \overline{g})$. Pela continuidade da inversa à direita,

$$\|h\|_{H^2(\Omega)} = c_1[\|0\|_{H^{3/2}}(\Omega) + \|\overline{g}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}] = c_1\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}.$$

Seja w sendo a solução do seguinte problema:

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta w = f + \Delta h \text{ em } \Omega, \\ w = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1. \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Dizemos que $w \in V$ é uma solução fraca do problema (2.5) se a seguinte equação é satisfeita:

$$\int_\Omega \nabla w(x).\nabla v(x)dx = \int_\Omega fvdx - \int_\Omega [\Delta h]vdx$$

para todo $v \in V$. Então, segue que $w \in V \cap H^2(\Omega)$, $\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$ *sobre* Γ_1 e por regularidade elíptica, segue a seguinte desigualdade:

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq c_2[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta h\|_{L^2(\Omega)}].$$

Então, $u = w + h \in V \cap H^2(\Omega)$ é solução de (2.4) e

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(\Omega)} &= \|w + h\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \|w\|_{H^2(\Omega)} + \|h\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq c_2[|f| + |\Delta h|] + \|h\|_{H^2(\Omega)}] \\ &\leq c_2|f| + c_1\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \\ &\leq c_3[|f| + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}]. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.3. *A norma*

$$u \longrightarrow \left[|\Delta h|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \right]^{1/2}$$

e a norma usual de $H^2(\Omega)$ *são equivalentes em* $V \cap H^2(\Omega)$.

Demonstração. Seja $u \in V \cap H^2(\Omega)$. Pela proposição 2.2,

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)} \leq c\left[|f|^2 + \|g\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_1)}\right] = c\left[|\Delta u|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_1)}\right].$$

E

$$|\Delta u| \leq \|u\|_{H^2(\Omega)} \; e \; \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \leq c\|u\|_{H^2(\Omega)}$$

a segunda desigualdade vem do teorema do traço. Portanto,

$$|\Delta u|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \leq (1+c^2)\|u\|^2_{H^2(\Omega)}$$

□

Proposição 2.4. *Suponha que* $u^0 \in V \cap H^2(\Omega)$, $u^1 \in V$ *e* $\mu(0)\frac{\partial u^0}{\partial \nu} + \delta(x)u^1 = 0$ *sobre* Γ_1. *Então, para cada* $\epsilon > 0$, *existe* w *e* z *em* $V \cap H^2(\Omega)$ *tal que:*

$$\|w - u^0\|_{V\cap H^2(\Omega)} < \epsilon \ e \ \|z - u^1\|_V < \epsilon$$

com

$$\mu(0)\frac{\partial w}{\partial \nu} + \delta(x)z = 0 \ sobre \ \Gamma_1.$$

Demonstração. Como $V \cap H^2(\Omega)$ é denso em V (ver [16], página 104), para todo $\epsilon > 0$ existe $z \in V \cap H^2(\Omega)$ tal que $\|z - u^1\| < \epsilon$.

Seja w solução de

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta w = -\Delta u^0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = -\dfrac{\delta(x)}{\mu(0)} z & \text{sobre } \Gamma_1. \end{array}\right. \tag{2.6}$$

Pela proposição 2.2 segue que $w \in V \cap H^2(\Omega)$ e pela proposição 2.3, obtemos que

$$\begin{aligned} \|w - u^0\|^2_{V\cap H^2(\Omega)} &= |\Delta w - \Delta u^0|^2 + \left\|\frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{\partial u^0}{\partial \nu}\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \\ &= |\Delta u^0 - \Delta u^0|^2 + \left\|\frac{\delta(x)}{\mu(0)}z - \frac{\partial u^0}{\partial \nu}\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \\ &= \left\|\frac{\delta(x)}{\mu(0)}z - \frac{\delta(x)}{\mu(0)}u^1\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \\ &= c\|z - u^1\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \\ &\leq c\|z - u^1\|^2_{H^2(\Omega)} \\ &= c\|z - u^1\|^2_V. \end{aligned}$$

A desigualdade acima é proveniente do Teorema traço, e a última igualdade é válida, pois $z \in V \cap H^2(\Omega)$ e $u^1 \in V$. □

Capítulo 3

Solução Forte

Neste capítulo demonstraremos a existência de solução forte para o problema misto (1), onde u^0 e u^1 são suaves. Para isto, usaremos o método de Faedo Galerkin que consiste em três etapas:

1. Encontrar soluções aproximadas para o problema em dimensão finita;

2. Estimativas a priori das soluções aproximadas;

3. Passagem ao limite das soluções aproximadas.

3.1 Existência de solução forte

Definição 3.1. *Dizemos que uma função $u : \Omega \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma solução forte do problema (1) se*

$$u \in L^\infty_{Loc}(0, \infty; V \cap H^2(\Omega)),\ \ u' \in L^\infty_{Loc}(0, \infty; V) \tag{3.1}$$

$$u'' \in L^\infty_{Loc}(0, \infty; L^2(\Omega)) \tag{3.2}$$

$$u'' - \mu(t)\Delta u = 0 \ em \ L^\infty_{Loc}(0, \infty; L^2(\Omega)) \tag{3.3}$$

$$\mu(t)\frac{\partial u}{\partial \nu} + \delta(x)u' = 0 \ em \ L^\infty_{Loc}(0, \infty; H^{1/2}(\Gamma_1)) \tag{3.4}$$

$$u(0) = u^0,\ \ u'(0) = u^1 \ em \ \Omega \tag{3.5}$$

Portanto, temos de provar o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Dado $u^0 \in V \cap H^2(\Omega)$ e $u^1 \in V$ com $\mu(0)\frac{\partial u^0}{\partial \nu} + \delta(x)u^1 = 0$ sobre Γ_1, existe uma única solução forte, do problema (1) $u : \Omega \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Demonstração. A prova será feita empregando o método de Faedo Galerkin com uma base para $V \cap H^2(\Omega)$. Com efeito, da proposição 2.4 nos obtemos duas sequências $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(u_k^1)_{k\in\mathbb{N}}$ de vetores pertencentes a $V \cap H^2(\Omega)$ tal que

$$\left| \begin{array}{l} u_k^0 \longmapsto u^0 \text{ em } V \cap H^2(\Omega) \ e \ u_k^1 \longmapsto u^1 \text{ em } V \text{ quando } k \longmapsto \infty \\ \mu(0)\dfrac{\partial u_k^0}{\partial \nu} + \delta(x)u_k^1 = 0 \text{ sobre } \Gamma_1, \ \forall \ k \in \mathbb{N} \end{array} \right. \tag{3.6}$$

Fixaremos $k \in \mathbb{N}$ de forma que u_k^0 *e* u_k^1 sejam linearmente independente em $V \cap H^2(\Omega)$, e definamos $w_1^k = \frac{u_k^0}{\|u_k^0\|}$ *e* $w_2^k = \frac{u_k^1}{\|u_k^1\|}$. Como $V \cap H^2(\Omega)$ é separável (ver [6], página 54), podemos usar o processo de ortonormalização para construirmos uma base de $V \cap H^2(\Omega)$ representada por:

$$\{w_1^k, ..., w_j^k, ..\} \text{ para cada } k \in \mathbb{N} \tag{3.7}$$

Para $m \in \mathbb{N}$ consideremos o subespaço $V_m^k = [w_1^k, ..., w_m^k]$ gerado pelos m primeiros w_j^k de (3.7). Encontraremos uma solução $u_{km}(t) \in V_m^k$ tal que,

$$u_{km}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{kjm}(t) w_j^k(x), \tag{3.8}$$

onde $g_{kjm}(t)$ são soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\left| \begin{array}{l} (u''_{km}(t), v) + \mu(t)((u_{km}(t), v)) + \displaystyle\int_{\Gamma_1} \delta(x) u'_{km}(t) v d\Gamma = 0 \ \forall \ v \in V_m^k, \ m \in \mathbb{N} \\ u_{km}(0) = u_k^0, \ u'_{km}(0) = u_k^1 \end{array} \right. \tag{3.9}$$

Inicialmente, mostraremos que (3.9) tem uma solução local. Como (3.9) é válido para todo $v = w_i^k \in V_m^k$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{m} g''_{kjm}(t) w_j^k, w_i^k \right) + \mu(t) \left(\left(\sum_{j=1}^{m} g_{kjm}(t) w_j^k, w_i^k \right) \right) + \int_{\Gamma_1} \delta(x) \sum_{j=1}^{m} g'_{kjm}(t) w_j^k w_i^k d\Gamma = 0, \tag{3.10}$$

logo, podemos reescrever a equação (3.10) na seguinte forma matricial.

$$\begin{pmatrix} (w_1^k, w_1^k) & (w_2^k, w_1^k) & \cdots & (w_m^k, w_1^k) \\ (w_1^k, w_2^k) & (w_2^k, w_2^k) & \cdots & (w_m^k, w_m^k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1^k, w_m^k) & (w_2^k, w_m^k) & \cdots & (w_m^k, w_m^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g''_{k1m}(t) \\ g''_{k2m}(t) \\ \vdots \\ g''_{kmm}(t) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \mu(t)((w_1^k, w_1^k)) & \mu(t)((w_2^k, w_1^k)) & \cdots & \mu(t)((w_m^k, w_1^k)) \\ \mu(t)((w_1^k, w_2^k)) & \mu(t)((w_2^k, w_2^k)) & \cdots & \mu(t)((w_m^k, w_m^k)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu(t)((w_1^k, w_m^k)) & \mu(t)((w_2^k, w_m^k)) & \cdots & \mu(t)((w_m^k, w_m^k)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{k1m}(t) \\ g_{k2m}(t) \\ \vdots \\ g_{kmm}(t) \end{pmatrix}$$

$$
+\begin{pmatrix} \int_{\Gamma_1} \delta(x) \sum\limits_{j=1}^{m} g'_{kjm}(t) w_j^k w_1^k d\Gamma \\ \int_{\Gamma_1} \delta(x) \sum\limits_{j=1}^{m} g'_{kjm}(t) w_j^k w_2^k d\Gamma \\ \vdots \\ \int_{\Gamma_1} \delta(x) \sum\limits_{j=1}^{m} g'_{kjm}(t) w_j^k w_m^k d\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Consideremos

$$
C = \begin{pmatrix} (w_1^k, w_1^k) & (w_2^k, w_1^k) & \cdots & (w_m^k, w_1^k) \\ (w_1^k, w_2^k) & (w_2^k, w_2^k) & \cdots & (w_m^k, w_m^k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1^k, w_m^k) & (w_2^k, w_m^k) & \cdots & (w_m^k, w_m^k) \end{pmatrix},
$$

$$
A = \begin{pmatrix} \mu(t)((w_1^k, w_1^k)) & \mu(t)((w_2^k, w_1^k)) & \cdots & \mu(t)((w_m^k, w_1^k)) \\ \mu(t)((w_1^k, w_2^k)) & \mu(t)((w_2^k, w_2^k)) & \cdots & \mu(t)((w_m^k, w_m^k)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu(t)((w_1^k, w_m^k)) & \mu(t)((w_2^k, w_m^k)) & \cdots & \mu(t)((w_m^k, w_m^k)) \end{pmatrix},
$$

$$
G = \begin{pmatrix} \int_{\Gamma_1} \delta(x) \sum\limits_{j=1}^{m} g'_{kjm}(t) w_j^k w_1^k d\Gamma \\ \int_{\Gamma_1} \delta(x) \sum\limits_{j=1}^{m} g'_{kjm}(t) w_j^k w_2^k d\Gamma \\ \vdots \\ \int_{\Gamma_1} \delta(x) \sum\limits_{j=1}^{m} g'_{kjm}(t) w_j^k w_m^k d\Gamma \end{pmatrix},
$$

$$
z(t) = \begin{pmatrix} g_{k1m}(t) \\ g_{k2m}(t) \\ \vdots \\ g_{kmm}(t) \end{pmatrix}.
$$

Das condições iniciais, obtemos que,

$$
u_{km}(0) = \sum_{j=1}^{m} g_{kjm}(0) w_j^k = u_k^0 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{kjm} w_j^k,
$$

onde $g_{kjm}(0) = \alpha_{kjm},$ para $j = 1, 2..., m$. Analogamente, $g'_{kjm}(0) = \beta_{kjm}$ para $j = 1, 2..., m$. Desta forma, considere

$$
z(0) = [\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, ..., \alpha_{km}]^T \text{ e } z'(0) = [\beta_{k1}, \beta_{k2}, ..., \beta_{km}]^T,
$$

Obtemos a seguinte EDO:

$$
\left| \begin{array}{l} Cz''(t) + Az(t) + Gz'(t) = 0, \\ z(0) = [\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, ..., \alpha_{km}]^T, z'(0) = [\beta_{k1}, \beta_{k2}, ..., \beta_{km}]^T \end{array} \right. \tag{3.11}
$$

Mostraremos que C é inversível. Com efeito, como C é uma matriz real e simétrica, é auto-adjunta, e portanto diagonalizável, isto é, existe M inversível tal que

$$D = M^{-1}CM,$$

é uma matriz diagonal. Então basta mostrar que D é inversível, ou equivalentemente, que zero não é autovalor de D. Suponha por contradição que existe $v \neq 0$ tal que $Dv = 0$

$$Dv = 0 \Longrightarrow M^{-1}CMv = 0,$$

como M é inversível, $Mv \neq 0$ e $CMv = 0$, pois caso contrário $M^{-1}CMv \neq 0$, já que M^{-1} é inversível.

Considere

$$Mv = \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}.$$

Então,

$$CMv = C\varphi = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j (w_j^k, w_1^k) \\ \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j (w_j^k, w_2^k) \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j (w_j^k, w_m^k) \end{pmatrix}.$$

Portanto, $\left(\sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j w_j^k, w_1^k \right) = 0, \ \forall \ j = 1, 2, ..., m$. Então, o vetor $\alpha = \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j w_j^k$ é ortogonal a todo vetor de V_m^k. Em particular,

$$(\alpha, \alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j^k = 0 \Longrightarrow \varphi_j = 0, \forall j = 1, 2, ...m.$$

Logo, $\varphi = 0 \Longrightarrow 0 = \varphi = Mv$. O que é uma contradição, pois vimos que $Mv \neq 0$. Logo C é inversível e podemos escrever (3.11) da seguinte maneira:

$$\left| \begin{array}{l} z''(t) + C^{-1}Az(t) + C^{-1}Gz'(t) = 0, \\ z(0) = [\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, ..., \alpha_{km}]^T, z'(0) = [\beta_{k1}, \beta_{k2}, ..., \beta_{km}]^T \end{array} \right. \tag{3.12}$$

Definamos

$$Y_1(t) = z(t), \ Y_2(t) = z'(t) \ e \ Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix}.$$

Então,

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} Y_1'(t) \\ Y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'(t) \\ z''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_2(t) \\ -C^{-1}Az(t) - C^{-1}Gz'(t) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix}$$

Portanto a equação (3.12) pode ser representada pelo seguinte problema do valor inicial:

$$\left| \begin{array}{l} Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}G \end{pmatrix} Y(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{array} \right. \tag{3.13}$$

Mostraremos que o problema acima possui solução local usando o teorema de Carathéodory. Considere

$$h : \mathbb{R}^{2m} \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$$

definida por

$$h(y,t) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}G \end{pmatrix} y(t),$$

onde $y = (\xi_1, ..., \xi_m, \xi_{m+1}, ...\xi_{2m})$.

Temos que h verifica as condições do teorema de carathéodory (7.1). Com efeito,

1. Para todo $y \in \mathbb{R}^{2m}$ fixo, tem-se que $h(y,t)$ é mensurável, uma vez que $\mu \in W^{1,\infty}_{loc}(0,\infty)$ e g_{kjm} é solução da equação (3.9).

2. Para todo t fixo h é contínua em função de y. Com efeito, a aplicação

$$N : \mathbb{R}^{2m} \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$$
$$y \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}Az & -C^{-1}G \end{pmatrix} y,$$

é linear e contínua.

3. Seja $K \subset \mathbb{R}^{2m} \times [0,T]$ um conjunto compacto. Como N é contínua, existe $M_K > 0$ tal que

$$\|h(y,t)\|_{\mathbb{R}^{2m}} = \|N\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M_K$$

Portanto, pelo teorema de Carathéodory 7.2, existe uma solução $Y(t)$ do problema de valor inicial (3.13) em algum intervalo $[0, t_{km})$, com $t_{km} > 0$, e pela equivalência dos problema o problema (3.9) possui uma solução u_{km} no intervalo $[0, t_{km})$.

3.2 Estimativa a Priori

Nesta seção, estenderemos a solução encontrada na seção anterior definida em $[0, t_m)$ ao intervalo [0,T]. para todo $T > 0$. Para isto usaremos as estimativas a priori unida com o teorema do prolongamento (Teorema 7.3).

Primeira estimativa

Incialmente observemos que:

Observação 3.1.

$$\frac{d}{dt}|u'_{km}(t)|^2 = \frac{d}{dt}(u'_{km}(t), u'_{km}(t)) = 2(u''(t), u'(t)) \tag{3.14}$$

e

$$\begin{aligned} 2\mu(t)((u_{km}(t), u'_{km}(t))) &= \mu(t)\frac{d}{dt}\|u_{km}(t)\|^2 \\ &= \frac{d}{dt}[\mu(t)\|u_{km}(t)\|^2] - \mu'(t)\|u_{km}(t)\|^2 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Note também que $u'_{km}(t) \in V_m^k$, pois

$$u'_{km}(t) = \sum_{j=1}^{m} g'_{kjm}(t) w_j^k(x),$$

onde $g'_{kjm} \in \mathbb{R}$ e $w_j^k(x) \in V_m^k$.

Considerando $v = 2u'_{km}(t) \in V_m^k$, em (3.9), obtemos a seguinte igualdade

$$2(u''_{km}(t), u'_{km}(t)) + 2\mu(t)((u_{km}(t), u'_{km}(t))) + 2\int_{\Gamma_1} \delta(x)[u'_{km}(t)]^2 d\Gamma = 0.$$

Por (3.14) e (3.15),

$$\frac{d}{dt}|u'_{km}(t)|^2 + \frac{d}{dt}[\mu(t)\|u_{km}(t)\|^2] - \mu'(t)\|u_{km}(t)\|^2 + 2\int_{\Gamma_1} \delta(x)[u'_{km}(t)]^2 d\Gamma = 0,$$

e portanto,

$$\frac{d}{dt}|u'_{km}(t)|^2 + \frac{d}{dt}[\mu(t)\|u_{km}(t)\|^2] + 2\int_{\Gamma_1} \delta(x)[u'_{km}(t)]^2 d\Gamma \leq |\mu'(t)|\|u_{km}(t)\|^2.$$

Integrando sobre o intervalo $[0, t)$, onde $0 < t < t_m$, obtemos:

$$\begin{aligned} |u'_{km}(t)|^2 + \mu(t)\|u_{km}(t)\|^2 &+ 2\int_0^t \int_{\Gamma_1} \delta(x)[u'_{km}(t)]^2 d\Gamma \\ &\leq |u_k^1|^2 + \mu(0)\|u_k^0\|^2 + \int_0^t |\mu'(s)|\|u'_{km}(s)\|^2 ds. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Como $\mu(t) \geq \mu_0 > 0$ e $|\mu'| \in L^1_{loc}(0,\infty)$. Então, considerando $c_1 = min\{1, 2, \mu_0\}$ obtemos de (3.16) que:

$$\begin{aligned} c_1(|u'_{km}(t)|^2 + \|u_{km}(t)\|^2 &+ \int_0^t \int_{\Gamma_1} \delta(x)[u'_{km}(s)]^2 d\Gamma ds) \\ &\leq |u^1_k|^2 + \mu(0)\|u^0_k\|^2 + \int_0^t |\mu'(s)|\|u'_{km}(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |u'_{km}(t)|^2 + \|u_{km}(t)\|^2 &+ \int_0^t \int_{\Gamma_1} \delta(x)[u'_{km}(s)]^2 d\Gamma ds \\ &\leq \frac{1}{c_1}(|u^1_k|^2 + \mu(0)\|u^0_k\|^2 + \int_0^t |\mu'(s)|\|u'_{km}(s)\|^2 ds) \end{aligned}$$

Considerando $G(t) = \int_0^t \int_{\Gamma_1} \delta(x)[u'_{km}(s)]^2 d\Gamma ds$, $K = |u^1_k|^2 + \mu(0)\|u^0_k\|^2$, $C = \frac{1}{C_1}$ e observando que $G(t) > 0$, teremos

$$\begin{aligned} &|u'_{km}(t)|^2 + \|u_{km}(t)\|^2 + G(t) \leq K + \int_0^t C|\mu'(s)|\|u'_{km}(s)\|^2 ds. \\ &\leq K + \int_0^t C\left[|\mu'(s)|\|u'_{km}(s)\|^2 + \|u_{km}(s)\|^2 + G(s)\right] ds. \end{aligned} \tag{3.17}$$

pois, K e C são constantes independentes de m e k, e as sequências $(|u^1_k|)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\|u^0_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ são convergentes, e portanto limitadas.

Seja $T > 0$. Então, usando a desigualdade de Gronwall em (3.17),

$$|u'_{km}(t)|^2 + \|u_{km}(t)\|^2 + \int_0^t \int_{\Gamma_1} \delta(x)[u'_{km}(s)]^2 d\Gamma ds \leq K e^{\int_0^t \int_{\Gamma_1} C|\mu'(s)|ds} \tag{3.18}$$

$\forall\ 0 \leq t \leq T$ e $m \in \mathbb{N}$.

Da desigualdade (3.18), podemos utilizar o teorema do Prolongamento e a unicidade do sistema aproximado implicando que $u_{km(t)}$ e $u'_{km(t)}$ estão definidos sobre $[0, T]$, para todo $t > 0$ e de (3.18) temos que,

$$\left|\begin{array}{l} (u_{km}) \text{ é limitado em } L^\infty_{loc}(0,\infty; V), \\ (u'_{km}) \text{ é limitado em } L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega)), \\ (u'_{km}) \text{ é limitado em } L^2_{loc}(0,\infty; L^2(\Gamma_1)), \end{array}\right. \tag{3.19}$$

Segunda estimativa

Iniciamente mostraremos que $u''(0)$ é limitado em $L^2(\Omega)$. Com efeito, tomando $t = 0$ na equação (3.9), obtemos:

$$(u''_{km}(0), v) + ((\mu(0)u_{km}(0), v)) + \int_{\Gamma_1} \delta(x)u'_{km}(0)v d\Gamma = 0$$

Como $u_{km}(0) = u_k^0,\ u'_{km}(0) = u_k^1,\ \mu(0)\frac{\partial u_k^0}{\partial \nu} = -\delta(x)u_k^1$ sobre Γ_1 e usando a segunda fórmula de Green generalizada (Proposição 7.3), obtemos:

$$\begin{aligned}
(u''_{km}(0), v) &= -((\mu(0)u_k^0, v)) + \int_{\Gamma_1} -\delta(x)u_k^1 v d\Gamma \Rightarrow \\
&= -((\mu(0)u_k^0, v)) + \int_{\Gamma_1} \mu(0)\frac{\partial u_k^0}{\partial \nu} v d\Gamma \\
&= (\mu(0)\Delta u_k^0, v),\ \forall v \in V_m^k.
\end{aligned}$$

Considere $v = u''_{km}(0)$ e observe que,

$$\begin{aligned}
|u''_{km}(0)|^2 &= (u''_{km}(0), u''_{km}(0)) \\
&= (\mu(0)\Delta u_k^0, u''_{km}(0)) \\
&\leq |\mu(0)||\Delta u_k^0||u''_{km}(0)| \\
&\leq c|\Delta u_k^0| \\
&\leq c\|u_k^0\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq c(\|u_k^0\|_{H^2(\Omega)} + \|u_k^0\|_V) \\
&= c\|u_k^0\|_{V\cap H^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}}$ converge em $V \cap H^2(\Omega)$, então

$$u''_{km}(0) \text{ é limitado em } L^2(\Omega)$$

Para obtermos a estimativa para $u''_{km}(t)$ consideremos a derivada com respeito a t na equação aproximada (3.9):

$$\frac{d}{dt}(u''_{km}(t), v) + \frac{d}{dt}(\mu(t)((u_{km}(t), v))) + \frac{d}{dt}\left(\int_{\Gamma_1} \delta(x)u'_{km}(t)v d\Gamma\right) = 0$$

então,

$$(u'''_{km}(t), v) + \mu(t)((u'_{km}(t), v)) + \mu'(t)((u_{km}(t), v)) + \int_{\Gamma_1} \delta(x)[u''_{km}(t)]v d\Gamma = 0$$

Considerando $v = 2u''_{km}(t) \in V_m^k$, obtemos

$$2(u'''_{km}(t), u''_{km}(t)) + 2\mu(t)((u'_{km}(t), u''_{km}(t))) + 2\int_{\Gamma_1} \delta(x)[u''_{km}(t)]^2 d\Gamma + 2\mu'(t)((u_{km}(t), u''_{km}(t))) = 0 \tag{3.20}$$

Observação 3.2. *Modificaremos o último termo de (3.20). Considerando $v = u''_{km}(t)$ em (3.9) e multiplicando ambos os membros por $\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}$, obtendo a seguinte equação:*

$$\mu'(t)((u_{km}(t), u''_{km}(t))) = -\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}|u''_{km}(t)|^2 - \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\int_{\Gamma_1} \delta(x)u'_{km}(t)u''_{km}(t) d\Gamma \tag{3.21}$$

Observação 3.3. *Para modificar o segundo termo do lado esquerdo de (3.20), consideremos as seguintes igualdades*

$$\begin{aligned}\mu(t)((u'_{km}(t),u''_{km}(t))) &= \frac{\mu(t)}{2}\frac{d}{dt}\|u'_{km}(t)\|^2\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\mu(t)\|u'_{km}(t)\|^2\right]-\frac{\mu'(t)}{2}\|u'_{km}(t)\|^2 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Substituindo (3.21) e (3.22) em (3.20), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|u''_{km}(t)|^2 &+ \frac{d}{dt}\left[\mu(t)\|u'_{km}(t)\|^2\right]-\mu'(t)\|u'_{km}(t)\|^2\\ &+ 2\int_{\Gamma_1}\delta(x)[u''_{km}(t)]^2d\Gamma = 2\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}|u''_{km}(t)|^2+2\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\int_{\Gamma_1}\delta(x)u'_{km}(t)u''_{km}(t)d\Gamma\\ .\end{aligned} \tag{3.23}$$

Observação 3.4. *Agora modificaremos a integral da superficie no lado direito de (3.23). Com efeito, pelo desigualdade de Hölder (proposição 7.2) temos,*

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1}\left|\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\delta(x)u'_{km}(t)u''_{km}(t)\right|d\Gamma &= \left(\int_{\Gamma_1}\left|\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\delta^{1/2}(x)u'_{km}(t)\delta^{1/2}u''_{km}(t)\right|d\Gamma\right)\\ &\le \left(\int_{\Gamma_1}\left|\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\delta^{1/2}(x)u'_{km}(t)\right|^2d\Gamma\right)^{1/2}\left(\int_{\Gamma_1}\left|\delta^{1/2}(x)u''_{km}(t)\right|^2d\Gamma\right)^{1/2}\\ &\le \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_1}\delta(x)\left[\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}u'_{km}(t)\right]^2d\Gamma\right)+\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_1}\delta(x)\left[u''_{km}(t)\right]^2d\Gamma\right)\\ &.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Substituindo (3.24) em (3.23) e usando o fato de $\frac{1}{\mu}\le\frac{1}{\mu_0}$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|u''_{km}(t)^2| &+ \frac{d}{dt}\left[\mu(t)\|u'_{km}(t)\|^2\right]+2\int_{\Gamma_1}\delta(x)[u''_{km}(t)]^2d\Gamma\\ &\le 2\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}|u''_{km}(t)|^2+2\left(\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_1}\delta(x)\left[\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}u'_{km}(t)\right]^2d\Gamma\right)\right)\\ &+ 2\left(\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_1}\delta(x)\left[u''_{km}(t)\right]^2d\Gamma\right)\right)+\mu'(t)\|u'_{km}(t)\|^2\\ &\le 2\frac{|\mu'(t)|}{|\mu_0|}|u''_{km}(t)|^2+|\mu'(t)|\|u'_{km}(t)\|^2\\ &+ \int_{\Gamma_1}\delta(x)\left[\frac{\mu'(t)}{\mu_0}u'_{km}(t)\right]^2d\Gamma+\int_{\Gamma_1}\delta(x)\left[u''_{km}(t)\right]^2d\Gamma\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}|u''_{km}(t)|^2 + \frac{d}{dt}\left[\mu(t)\|u'_{km}(t)\|^2\right]+\int_{\Gamma_1}\delta(x)[u''_{km}(t)]^2d\Gamma$$

$$\leq \quad 2\frac{|\mu'(t)|}{|\mu_0|}|u''_{km}(t)|^2 + |\mu'(t)|\|u'_{km}(t)\|^2 + \int_{\Gamma_1}\delta(x)\left[\frac{\mu'(t)}{\mu_0}u'_{km}(t)\right]^2 d\Gamma \qquad (3.25)$$

Integrando a desigualdade acima de 0 a t, para $0 \leq t \leq T,\ T > 0$ e usando a primeira estimativa, obtemos

$$\begin{aligned}
|u''_{km}(t)|^2 \quad &+ \quad \mu(t)\|u'_{km}(t)\|^2 + \int_0^t\int_{\Gamma_1}\delta(x)[u''_{km}(t)]^2 d\Gamma dt \\
&\leq \quad |u''_{km}(0)|^2 + \mu(0)\|u^1_k\|^2 + \int_0^t\left(\delta(x)\frac{|\mu'(t)|}{|\mu_0|}|u''_{km}(t)|^2 + |\mu'(t)|\|u'_{km}(t)\|^2\right)dt \\
&+ \quad \int_0^t\int_{\Gamma_1}\delta(x)\left[\frac{\mu'(t)}{\mu_0}u'_{km}(t)\right]^2 d\Gamma dt \\
&\leq \quad K + \int_0^t \theta(s)\left[|u''_{km}(s)|^2 + \|u'_{km}(s)\|^2\right]ds, \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

onde $\theta(s) = \delta(x)\frac{|\mu'(t)|}{\mu_0} + |\mu'(t)|$.

Para cada $t \in [0,T]$, onde K é uma constante positiva independente de k e m, e $\theta(s) \in L^1_{loc}(0,\infty)$ também independente de k e m. Aplicando a desigualdade de Gronwall para (3.26), obtemos

$$|u''_{km}(t)|^2 + \|u'_{km}(t)\|^2 + \int_0^t\int_{\Gamma_1}\delta(x)[u''_{km}(t)]^2 d\Gamma dt \leq Ke^{\int_0^t C|\theta(s)ds|}, \qquad (3.27)$$

independente de k e m, $\forall\ t \in [0,T]$.

Usando o teorema do Prolongamento de forma análoga a primeira estimativa o resultado segue. E tambem de (3.27), temos que

$$\left|\begin{array}{l}
(u'_{km}) \text{ é limitado em } L^\infty_{loc}(0,\infty;V), \\
(u''_{km}) \text{ é limitado em } L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)), \\
(u''_{km}) \text{ é limitado em } L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)).
\end{array}\right. \qquad (3.28)$$

3.3 Passagem ao limite

Com o índice k fixo. As estimativas (3.19) e (3.28) permitem por indução e processo de diagonalização obtermos subsequências (u_{km_n}) de (u_{km}) que será denotada também por (u_{km}) e uma função $u_k : \Omega \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo,

$$\left|\begin{array}{l}
(u_{km}) \rightharpoonup u_k \text{ fraco estrela em } L^\infty_{loc}(0,\infty;V), \\
(u'_{km}) \rightharpoonup u'_k \text{ fraco estrela em } L^\infty_{loc}(0,\infty;V), \\
(u''_{km}) \rightharpoonup u''_k \text{ fraco estrela em } L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)), \\
(u'_{km}) \rightharpoonup u'_k \text{ fraco estrela em } L^2_{loc}(0,\infty;H^{1/2}(\Gamma_1)).
\end{array}\right. \qquad (3.29)$$

Ver [1], página 63.

Denotando $\gamma_0 u'_{km}$ por u'_{km} em $H^{1/2}(\Gamma_1)$, a última afirmação segue do teorema 1.1, pois

$\|\gamma_0 u'_{km}\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \leq \|u'_{km}\|_V$ e de (3.28) o resultado segue.

Para o intervalo tempo $[0,1]$, existe uma subsequência (u_{km^1}) de (u_{km}) e uma função $u_k^{(1)}$: $\Omega \times (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo,

$$\left| \begin{array}{l} (u_{km^{(1)}}) \rightharpoonup u_k^{(1)} \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,1;V), \\ (u'_{km^{(1)}}) \rightharpoonup (u_k^{(1)})' \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,1;V), \\ (u''_{km^{(1)}}) \rightharpoonup (u_k^{(1)})'' \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,1;L^2(\Omega)), \\ (u'_{km^{(1)}}) \rightharpoonup (u_k^{(1)})' \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,1;H^{1/2}(\Gamma_1)). \end{array} \right. \tag{3.30}$$

Para todo intervalo $[0,l]$, onde $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$, existe uma subsequencia $(u_{km^{(l)}})$ de $(u_{km^{(l-1)}})$ e uma função $u_k^{(l)} : \Omega \times (0,l) \longrightarrow \mathbb{R}$, $u_{km^{(l)}} = u_{km^{(l-1)}}$ sobre $\Omega \times (0, l-1)$, tal que temos a convergência (3.30) para $u_{km^{(l)}}$ sobre $\Omega \times (0, l-1)$. Aplicando o processo de diagonalização nos obtemos a existência da função u_k e a convergência (3.29).

Multiplicando ambos os membros de (3.9) por $\theta \in D(0,\infty)$, e integrando, obtemos como consequência de (3.29),

$$\int_0^\infty (u''_k(t), v)\theta dt + \int_0^\infty \mu(t)((u_k(t), v))\theta dt + \int_0^\infty \int_{\Gamma_1} \delta(x) u'_k(t) v \theta d\Gamma dt = 0, \forall v \in V_m^k. \tag{3.31}$$

Notemos que $\{w_1^k, w_2^k, ..\}$ é uma base Hilbertiana de $V \cap H^2(\Omega)$. Portanto, por densidade a equação (3.31) é unificada para todo $v \in V \cap H^2(\Omega)$.

Observamos que as estimativas (3.19) e (3.28) são também validas para todo $k \in \mathbb{N}$. Então pelo mesmo processo feito para obter (3.29), teremos uma sequência diagonal (u_{k_k}), ainda denotada por (u_k), e a função $u_k : \Omega \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\left| \begin{array}{l} (u_k) \rightharpoonup u \text{ fraco estrela em } L^\infty_{loc}(0,\infty;V), \\ (u'_k) \rightharpoonup u' \text{ fraco estrela em } L^\infty_{loc}(0,\infty;V), \\ (u''_k) \rightharpoonup u'' \text{ fraco estrela em } L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)), \\ (u'_k) \rightharpoonup u' \text{ fraco estrela em } L^\infty_{loc}(0,\infty;H^{1/2}(\Gamma_1)). \end{array} \right. \tag{3.32}$$

Tomando o limite em (3.31), usando a convergência de (3.32) e observando que $V \cap H^2(\Omega)$ é denso em V, obtemos:

$$\int_0^\infty (u''(t),v)\theta dt + \int_0^\infty \mu(t)((u(t),v))\theta dt + \int_0^\infty \int_{\Gamma_1} \delta(x)u'(t)v\theta d\Gamma dt = 0, \forall \theta \in D(0,\infty) \ e \ \forall v \in V. \tag{3.33}$$

Se considerarmos na equação (3.33) $v \in D(\Omega) \subset V$ e usarmos a Segunda fórmula de Green generalizada, segue que:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^\infty (u''(t),v)\theta dt + \int_0^\infty \mu(t)((u(t),v))\theta dt + \int_0^\infty \int_{\Gamma_1} \delta(x)u'(t)v\theta d\Gamma dt \\
&= \int_0^\infty (u''(t),v)\theta dt + \int_0^\infty \mu(t)((u(t),v))\theta dt \\
&= \int_0^\infty (u''(t),v)\theta dt + \int_0^\infty -\mu(\Delta u,v)\theta dt \\
&= \int_0^\infty (u''-\mu\Delta u,v)\theta dt \\
&\Rightarrow \ u''-\mu\Delta u = 0 \text{ em } L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Sabemos que $\mu u \in L^\infty_{loc}(0,\infty;V)$ e por (3.34), $\Delta(\mu u) \in L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega))$. Logo, pela Proposição 7.7 com $\alpha = 1$, segue que $\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^\infty_{loc}(0,\infty;H^{-1/2}(\Gamma_1))$.

Multiplicando ambos os menbros de (3.34) por $v\theta$, com $v \in V$ e $\theta \in D(0,\infty)$, integrando e usando a segunda fórmula de Green generalizada, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (u''(t),v)\theta dt \ &+ \ \int_0^\infty -\mu(\Delta u,v)\theta dt \\
&= \int_0^\infty (u''(t),v)\theta dt + \int_0^\infty \mu\left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v\rangle\right)\theta dt \\
&= \int_0^\infty (u''(t),v)\theta dt + \int_0^\infty \mu((u(t),v))\theta dt - \int_0^\infty \left\langle \mu\frac{\partial u}{\partial \nu}, v\right\rangle \theta dt \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.35}$$

onde $\langle .,.\rangle$ é o par dual de $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$.

Comparando (3.33) e (3.35), obtemos a seguinte igualdade:

$$-\int_0^\infty \left\langle \mu\frac{\partial u}{\partial \nu}, v\right\rangle \theta dt = \int_0^\infty \langle \delta u', v\rangle \theta dt = 0$$

então,

$$\int_0^\infty \left\langle \mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + \delta u', v\right\rangle \theta dt = 0$$

o que implica

$$\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + \delta u' = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty). \tag{3.36}$$

Daí e da convergência de (3.32) resulta que (3.4) é válido.

Para Concluir a prova do teorema 1 resta provar que $u \in L^{\infty}_{loc}(0, \infty; H^2(\Omega))$. Com efeito, u é solução do problema:

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta(\mu u) = u'' & \text{sobre } \Omega \times [0, T], \\ \mu u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times [0, T]. \\ \mu \frac{\partial u}{\partial \nu} = -\delta u' & \text{sobre } \Gamma_1 \times [0, T], \end{array} \right. \tag{3.37}$$

para todo $T > 0$. Onde a primeira linha é devido a (3.34), a segunda por hipótese e a terceira por (3.36). Assim $u'' \in L^{\infty}_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega))$ e $\delta u' \in L^{\infty}_{loc}(0, \infty; H^{1/2}(\Gamma_1))$ segue da proposição 2.2 que $\mu u \in L^{\infty}_{loc}(0, \infty; H^2(\Omega))$, isto é $u \in L^{\infty}_{loc}(0, \infty; H^2(\Omega))$.

3.4 Condições iniciais

Como $u \in L^{\infty}(0, T; H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)), u' \in L^{\infty}(0, T; H^1_0(\Omega))$, temo pela proposição 7.10 que $u : [0, T] \longrightarrow H^1_0(\Omega)$. Logo, faz sentido calcular $u(0)$. Analogamente, como $u' \in L^{\infty}(0, T; H^1_0(\Omega))$ *e* $u'' \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$, faz sentido calcular $u'(0)$.

Das convergências da primeira e segunda estimativas, com $\theta \in C^1[0, T]$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$.

$$\int_0^T ((u_m(t), v))\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T ((u(t), v))\theta'(t)dt$$
$$\int_0^T ((u'_m(t), v))\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T ((u'(t), v))\theta(t)dt$$

Adicionando os resultados acima, obtemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt}[((u_m(t), v))\theta(t)]dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}[((u(t), v))\theta(t)]dt$$

O que implica,

$$((u_m(0), v)) \longrightarrow ((u(0), v)), \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

Como $u_m(0) \longrightarrow u_0$ em $H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1_0(\Omega)$, resulta que

$$u_m(0) \longrightarrow u_0 \text{ em } H^1_0(\Omega).$$

Da unicidade do limite obtemos

$$((u_m(0), v)) = ((u(0), v)), \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, $u_m(0) = u_0$.

De modo análogo, mostramos que $u'_m(0) = u_1$.

□

Corolário 3.2. *Se $\mu' \in L^1(0,\infty) \cap L^\infty(0,\infty)$, então a solução u do teorema 3.1 tem a regularidade suplementar:*

$$\begin{gathered} u \in L^\infty_{loc}(0,\infty; V \cap H^2(\Omega)) \text{ e } u' \in L^\infty_{loc}(0,\infty; V) \\ \text{com } \mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + \delta u' = 0 \text{ sobre } L^\infty(0,\infty; H^{1/2}(\Gamma_1)) \end{gathered} \tag{3.38}$$

Além disso, se $\mu \leq 0$ q.t.p em $(0,\infty]$, a energia

$$E(t) = \frac{1}{2}|u'(t)|^2 + \frac{1}{2}\mu(t)\|u(t)\|^2,$$

associado com o problema (1), é não crescente sobre $[0,\infty)$.

Capítulo 4

Solução Fraca

Neste capítulo, consideremos o problema (1) com os dados iniciais enfraquecido, isto é, nos assumiremos que

$$u^0 \in V \text{ e } u^1 \in L^2(\Omega)$$

A solução correspondente será chamada de solução fraca. Para resolver este problema, obteremos aproximações para u^0 e u^1 por sequências de vetores em V e $V \cap H^2(\Omega)$, aplicando o resultado do teorema 3.1.

Teorema 4.1. *Dado*

$$u^0 \in V \ \text{ e } u^1 \in L^2(\Omega), \tag{4.1}$$

existe uma única função $u : \Omega \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, *satisfazendo as condições:*

$$u \in C^0([0,T]; V) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)) \ \forall \ T > 0, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\ ,\ u' \in L^2_{loc}(0, \infty; L^2(\Gamma_1)), \tag{4.3}$$

$$\mu(t)\frac{\partial u}{\partial \nu} + \delta(x)u' = 0 \ \text{ sobre } L^2_{loc}(0, \infty; L^2(\Gamma_1), \tag{4.4}$$

$$u'' - \mu\Delta u = 0 \ \text{ em } L^2_{loc}(0, \infty; V'), \tag{4.5}$$

$$u(0) = u^0, u'(0) = u^1. \tag{4.6}$$

onde V' é o dual de V.

Demonstração. Aproximando u^0 e u^1 satisfazendo (4.1), por vetores de $V \cap H^2(\Omega)$ e V, respectivamente de maneira análoga ao que foi feito no teorema 3.1 do capítulo 3, obtemos sequências $(u^0_p)_{p\in\mathbb{N}}$ e $(u^1_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de funções em $V \cap H^2(\Omega)$ e V, respectivamente, tal que:

$$u_p^0 \longmapsto u^0 \text{ em } V \; e \; u_p^1 \longmapsto u^1 \text{ em } L^2(\Omega) \text{ quando } p \longmapsto \infty \; e \tag{4.7}$$

$$\mu(0)\frac{\partial u_p^0}{\partial \nu} + \delta(x)u_p^1 = 0 \text{ sobre } \Gamma_1, \;\; \forall \, p \in \mathbb{N} \tag{4.8}$$

Com efeito, é suficiente considerar $u_p^1 \in H_0^1(\Omega)$ convergindo para u^1 em $L^2(\Omega)$, e escolha u_p^0 em $W = \{v \in V \cap H^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \Gamma_1 \}$ que é denso em V(ver [16], página 104 ou [10]).

Para cada $\{u_p^0, u_p^1\}$, determinaremos uma única solução forte u_p satisfazendo teorema 3.1. Multiplicando ambos os lados de (3.3) por u_p, integrando sobre Ω e aplicando a segunda fórmula de Green generalizada (proposição 7.3), obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega u_p''(t)u_p'(t)dx - \int_\Omega \mu(t)\Delta u_p(t)u_p'(t)dx \\
&= (u_p''(t), u_p'(t)) - (\mu(t)\Delta u_p(t), u_p'(t)) \\
&= (u_p''(t), u_p'(t)) + \mu(t)\left(((u_p(t), u_p'(t))) - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_p}{\partial \nu}u_p'(t)d\Gamma\right) \\
&= (u_p''(t), u_p'(t)) + \mu(t)((u_p(t), u_p'(t))) - \int_{\Gamma_1} \mu(t)\frac{\partial u_p}{\partial \nu}u_p'(t)d\Gamma \\
&= (u_p''(t), u_p'(t)) + \mu(t)((u_p'(t), u_p(t))) + \int_{\Gamma_1} \delta(x)[u_p'(t)]^2 d\Gamma \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_p'(t)|^2 + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\|u_p(t)\|^2 + \int_{\Gamma_1} \delta(x)[u_p'(t)]^2 d\Gamma
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|u_p'(t)|^2 + \frac{d}{dt}[\mu(t)\|u_p(t)\|^2] + \int_{\Gamma_1} 2\delta(x)[u_p'(t)]^2 d\Gamma &= \mu'(t)\|u_p(t)\|^2 \\
&\leq |\mu'(t)|\|u_p(t)\|^2
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Na última desigualdade, usamos (4.9) e Observação 3.1.

Integrando sobre $[0, t)$, temos

$$\begin{aligned}
|u_p'(t)|^2 + \mu(t)\|u_p(t)\|^2 &+ 2\int_0^t \int_{\Gamma_1} \delta(x)[u_p'(t)]^2 d\Gamma \\
&\leq |u_p^1|^2 + \mu(0)\|u_p^0\|^2 + \int_0^t |\mu'(s)|\|u_p'(s)\|^2 ds.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

De modo análogo ao que foi feito na primeira estimativa e usando (4.7), obtemos

$$|u_p'(t)|^2 + \mu(t)\|u_p(t)\|^2 + \int_0^t \int_{\Gamma_1} \delta(x)[u_p'(t)]^2 d\Gamma < C, \tag{4.11}$$

onde C é uma constante positiva independente de p, $\forall t \in [0,T], T > 0$. Daí segue que

$$\left|\begin{array}{l} (u_p) \text{ é limitado em } L^\infty_{loc}(0,\infty;V), \\ (u'_p) \text{ é limitado em } L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)), \\ (u'_p) \text{ é limitado em } L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)). \end{array}\right. \tag{4.12}$$

De (3.4),temos que $\frac{\partial u_p}{\partial \nu} = -\frac{\delta}{\mu} u'_p$ sobre $\Gamma_1 \times [0,\infty)$ portanto, por (4.12) temos que

$$\left(\frac{\partial u_p}{\partial \nu}\right)_{p\in\mathbb{N}} \text{ é limitado em } L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)) \tag{4.13}$$

As estimativas (4.12) e (4.13) implicam de maneira análoga ao argumento aplicado em (3.29), a existência de uma subsequência de $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$, ainda denotada por $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ e funções

$$u : \Omega \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}; \quad \alpha : \Gamma_1 \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}; \quad \chi : \Gamma_1 \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R},$$

satisfazendo a seguinte condições:

$$\left|\begin{array}{l} (u_p) \rightharpoonup u \text{ fraco estrela em } L^\infty_{loc}(0,\infty;V), \\ (u'_p) \rightharpoonup u' \text{ fraco estrela em } L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)), \\ (u'_p) \rightharpoonup \alpha \text{ fraco em } L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)), \\ \frac{\partial u_p}{\partial \nu} \rightharpoonup \chi \text{ fraco em } L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)). \end{array}\right. \tag{4.14}$$

Como $\mu(t)\frac{\partial u_p}{\partial \nu} + \delta(x)u'_p = 0$ sobre $\Gamma_1 \times (0,\infty)$, temos

$$\mu(t)\chi + \delta(x)u' = 0 \text{ sobre } L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)) \tag{4.15}$$

E de (3.3), temos que

$$u''_p - \mu\Delta u_p = 0 \text{ em } L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)) \tag{4.16}$$

Multiplicando (4.16) por $v\theta$, com $v \in V$ e $\theta \in D(0,\infty)$, integrando, usando a segunda fórmula de Green generalizada e por fim aplicando o limite quando $p \longmapsto \infty$, obtemos

$$-\int_0^\infty (u'(t),v)\theta' dt + \int_0^\infty \mu(t)((u(t),v))\theta dt + \int_0^\infty \int_{\Gamma_1} \delta\alpha v\theta d\Gamma dt = 0, \forall \theta \in D(0,\infty) \ e \ v \in V.$$
.(4.17)

Se considerarmos $v \in D(\Omega)$ ou $v \in H^1_0(\Omega)$ de (4.17), obtemos

$$u'' - \mu\Delta u = 0 \text{ em } H^{-1}_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega)) \tag{4.18}$$

Assim provaremos que $\chi = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ sobre $\Gamma_1 \times (0,\infty)$.

Com efeito, seja T um número real positivo. Temos de (4.14) que,

$$\mu u_p \rightharpoonup \mu u \text{ fraco em } L^2(0,T;V). \tag{4.19}$$

Por outro lado, como $u'_p \rightharpoonup u'$ fraco em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ segue-se que $u''_p \rightharpoonup u''$ fraco em $H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$ (ver proposição 7.4).

Portanto, de (4.16) e (4.18) unido com a afirmação acima, obtemos:

$$\Delta(\mu u_p) \rightharpoonup \Delta(\mu u) \text{ fraco em } H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)) \tag{4.20}$$

As convergências de (4.19) e (4.20) unidas com a proposição 7.7 implicam em

$\gamma_1(\mu u) \in H^{-1}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_1))$ e

$$\gamma_1(\mu u_p) \rightharpoonup \gamma_1(\mu u) \text{ fraco } H^{-1}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_1)) \tag{4.21}$$

Temos também por (4.14) que,

$$\gamma_1(\mu u_p) \rightharpoonup \mu\chi \text{ fraco em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)) \tag{4.22}$$

De fato $L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)) \hookrightarrow H^{-1}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_1))$e de (4.21) e (4.22), nos obtemos $\chi = \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}$.

Provaremos agora que $\gamma_0 u' = \alpha$ sobre $\Gamma_1 \times (0,\infty)$. Com efeito, dado $T > 0$, de (4.14) temos que $u_p \rightharpoonup u$ fraco em $L^2(0,T;V)$ e segue da proposição 7.4 que

$$u'_p \rightharpoonup u' \text{ fraco em } H^{-1}_{loc}(0,T;H^{1/2}(\Gamma_1))$$

além disso,

$$u'_p \rightharpoonup \alpha \text{ fraco em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$$

por (4.14). Portanto, destas duas convergências e pela unicidade do limite obtemos $\gamma_0 u' = \alpha$.

De (4.15), obtemos a seguinte igualdade

$$\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + \delta u' = 0 \text{ em } L^2(0,\infty;L^2(\Gamma_1)).$$

Sendo assim, mostraremos que $u'' - \mu\Delta u = 0$ em $L^2(0,T;V')$, $\forall\, T > 0$. Apartir da segunda fórmula de Green generalizada, temos

$$\langle -\mu\Delta u, v\rangle = ((\mu u, v)) - \mu \left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle.$$

Aplicando Cauchy-Schwarz (teorema 7.5) e pela continuidade da aplicação traço γ_1, obtemos:

$$|\langle -\mu\Delta u, v\rangle| \leq \mu\|u\|\|v\| + \mu \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} |v|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}.$$

Pela continuidade de γ_0, obtemos $|v|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \leq C\|v\|$, que implica que,

$$|\langle -\mu\Delta u, v\rangle| \leq K_u\|v\| \Rightarrow \| - \mu\Delta u(t)\|_{V'} \leq K_u,$$

onde $k_u = \mu\left(\|u\| + C\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)}\right)$. Logo, $-\mu\Delta u \in L^2(0,T;V'), \forall\, T > 0$.

Aplicando a segunda fórmula de Green generalizada, observando que $\alpha = u'$ e $\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + \delta u' = 0$ sobre $\Gamma_1 \times (0,\infty)$ em (4.17), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_0^T (u'(t), v)\theta dt + \int_0^T \mu(t)((u(t), v))\theta' dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \delta\alpha v\theta d\Gamma dt \\ &= -\int_0^T (u'(t), v)\theta dt + \int_0^T \langle -\mu\Delta u, v\rangle dt \end{aligned} \tag{4.23}$$

Como $-\mu\Delta u \in L^2(0,T;V')$, então (4.23) é válida para todo $\theta \in D(0,T)$ e $v \in V$ e pela proposição (7.5), concluímos que:

$$u'' - \mu\Delta u = 0 \text{ em } L^2_{loc}(0,T;V'),\ \forall\, T > 0. \tag{4.24}$$

Provaremos agora a regularidade de (4.2).

Seja $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ a subsequência obtida de (4.14). Pelo Teorema 3.1, regularidade (3.1) e (3.2) e pela proposição 7.6, segue que:

$$u_p \in C^0([0,T];V) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)),\ \forall T > 0 \tag{4.25}$$

De (3.3), pela regularidade (4.25) e usando a segunda fórmula generalizada de Green, obtemos para $p \neq q, p, q \in \mathbb{N}$ que:

$$\begin{aligned} 0 &= (u''_p - u''_q, v) - \mu(\Delta(u_p - u_q), v) \\ &= (u''_p - u''_q, v) + \mu((u'_p - u'_q, v)) - \left\langle \mu\frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle \end{aligned}$$

.

E por (3.4),

$$(u_p'' - u_q'', v) + \mu((u_p' - u_q', v)) + \int_{\Gamma_1} \delta(u_p' - u_q')vd\Gamma = 0, \ \forall \ v \in L^2(0, T, V). \tag{4.26}$$

Considerando $v = u_p' - u_q'$ em (4.26) e pela observação 3.1, obtemos:

$$\frac{d}{dt}|u_p' - u_q'|^2 + \frac{d}{dt}[\mu\|u_p - u_q\|^2] + 2\int_{\Gamma_1} \delta[u_p' - u_q']^2 d\Gamma = \mu'\|u_p - u_q\|^2$$

Observando que

$$|u_p'(0) - u_q'(0)| = |u_p^1 - u_q^1| \text{ e } \|u_p(0) - u_q(0)\| = \|u_p^0 - u_q^0\|$$

e

$$u_p^0 \longrightarrow u^0 \text{ em } V, u_p^1 \longrightarrow u^1 \text{ em } L^2(\Omega) \tag{4.27}$$

Pela desigualdade de Gronwall, obtemos:

$$|u_p'(t) - u_q'(t)|^2 + \mu(t)\|u_p(t) - u_q(t)\|^2 \leq \left[|u_p^1 - u_q^1|^2 + \mu(0)\|u_p^0 - u_q^0\|^2\right] e^{\int_0^T |\mu'|ds} \tag{4.28}$$

$\forall \ t \in [0, T], T > 0.$

Logo, de (4.28) e (4.27) temos a regularidade de (4.2).

De (4.28), resulta que:

$$u_p \longrightarrow u \text{ forte em } C^0([0, T]; V),$$
$$u_p' \longrightarrow u' \text{ forte em } C^0([0, T]; L^2(\Omega)),$$

Logo,

$$\|u_p(t) - u(t)\| \leq sup\|u_p(t) - u(t)\| = \|u_p - u\|_{C^0([0,T];V)} \longrightarrow 0.$$

Portanto, $u_p(0) \longrightarrow u$ em V. Como $u_p^0 = u_p(0) \longrightarrow u^0 emV$ resulta da unicidade do limite em V que $u(0) = u^0$. De maneira análoga mostra-se que $u'(0) = u^1$.

Corolário 4.2. *Se $\mu' \in L^1(0, \infty)$, então a solução u obtida acima, tem as propriedades:*

$$u \in L^\infty(0, \infty; V) \ e \ u' \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$$
$$com \ \mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + \delta u' = 0 \ sobre \ L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1))$$

Se $\mu \leq 0$ q.t.p em $(0, \infty]$, a energia

$$E(t) = \frac{1}{2}|u'(t)|^2 + \frac{1}{2}\mu(t)\|u(t)\|^2,$$

é não crescente sobre $[0, \infty)$.

□

Capítulo 5

Unicidade

5.1 Unicidade da solução fraca

Nesta seção iremos mostra que a solução obtida no teorema 4.1 é única.

Suponha que temos duas soluções u e û com as condições do teorema 4.1. Então, $w = u - \hat{u}$ satisfaz as mesmas condições e $w(0) = 0, w'(0) = 0$. Mostraremos que $w = 0$ sobre $\Omega \times [0, \infty)$. Para isto, usaremos o método de Lions-Magenes [11], página 221 e Visik-ladyzhenshaya [19].

Seja $s \in [0, T]$, e

$$\psi(t) = \left| \begin{array}{l} -\int_t^s w(\sigma)d\sigma, \text{ para } 0 \leq t \leq s \\ 0 \text{ para } s \leq t \leq T. \end{array} \right.$$

Cuja a integral é considerada em V, Portanto, $\psi \in L^2(0, T; V)$. Com efeito,

$$\|\psi(t)\|_V = \left\| -\int_t^s w(\sigma)d\sigma \right\|_V \leq \int_t^s \|w(\sigma)\|_V d\sigma$$

Pela desigualdade de Hölder, (proposição 7.2),

$$\begin{aligned} \|\psi(t)\|_V^2 &\leq \left(\int_t^s \|w(\sigma)\|_V^2 d\sigma \right) \left(\int_t^s d\sigma \right) \\ &\leq \left(\int_0^T \|w(\sigma)\|_V^2 d\sigma \right) (s - t) \\ &\leq C_1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^T \|\psi(t)\|_V^2 dt \le \int_0^T C_1 dt = C_1 T < \infty \Longrightarrow \psi \in L^2(0,T;V).$$

Se definirmos $w_1(\xi) = \int_0^\xi w(\sigma)d\sigma$, obtemos para $0 \le t \le s$ que

$$\psi(t) = -\int_t^s w(\sigma)d\sigma = \int_0^t w(\sigma)d\sigma - \int_0^s w(\sigma)d\sigma = w_1(t) - w_1(s)$$

e

$$\psi'(t) = (w_1(t) - w_1(s))' = w_1'(t) = \left(\int_0^t w(\sigma)d\sigma\right)' = w(t).$$

De (4.6) no teorema 4.1, temos

$$\int_0^s \langle w''(t), \psi(t)\rangle dt - \int_0^s \langle \mu\Delta w(t), \psi(t)\rangle dt = 0. \tag{5.1}$$

Como $\langle w'', \psi\rangle = \frac{d}{dt}(w', \psi) - (w', \psi')$, então

$$\begin{aligned}
\int_0^s \langle w''(t), \psi(t)\rangle dt &= \int_0^s \left(\frac{d}{dt}(w'(t), \psi(t)) - (w'(t), \psi'(t))\right) dt \\
&= (w'(s), \psi(s)) - (w'(0), \psi(0)) - \int_0^s (w'(t), \psi'(t))dt \\
&= -\int_0^s (w'(t), \psi'(t))dt \\
&= -\int_0^s (w'(t), w(t))dt \\
&= -\int_0^s \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|w(t)\|^2 dt = -\frac{1}{2}\|w(s)\|^2. \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Como, $\mu(t)\frac{\partial w}{\partial \nu} + \delta w' = 0$ sobre Γ_1, e pela segunda fórmula de Green generalizada (proposição 7.3) segue que:

$$\int_0^s \langle -\mu\Delta w'', \psi\rangle dt = \int_0^s ((\mu w, \psi))dt + \int_0^s \int_{\Gamma_1} \delta w' \psi d\Gamma dt.$$

Tomando $w = \psi'$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^s \mu((w, \psi))dt &= \int_0^s \mu((\psi', \psi))dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^s \mu\frac{d}{dt}\|\psi(t)\|^2 dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\left[\mu(t)\|\psi(t)\|^2\right]dt - \frac{1}{2}\int_0^s \mu'(t)\|\psi(t)\|^2 dt \\
&= \frac{1}{2}[\mu(s)\|\psi(s)\|^2] - \frac{1}{2}\mu(0)\|\psi(0)\|^2 - \frac{1}{2}\int_0^s \mu'(t)\|\psi(t)\|^2 dt \\
&= -\frac{1}{2}\mu(0)\|w_1(s)\|^2 - \frac{1}{2}\int_0^s \mu'(t)\|\psi(t)\|^2 dt. \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

E também temos que,

$$
\int_0^s \int_{\Gamma_1} \delta w'\psi d\Gamma dt = \int_0^s (\sqrt{\delta}\psi'', \sqrt{\delta}\psi)_{L^2(\Gamma_1)}dt = \int_0^s \frac{d}{dt}(\sqrt{\delta}\psi', \sqrt{\delta}\psi)dt - \int_0^s (\sqrt{\delta}\psi', \sqrt{\delta}\psi')_{L^2(\Gamma_1)}dt.
$$

Como $\psi(s) = 0$ e $\psi'(0) = w(0) = 0$, segue que

$$
\int_0^s \int_{\Gamma_1} \delta w'\psi d\Gamma dt = -\int_0^s |\sqrt{\delta}\psi'|^2_{L^2(\Gamma_1)}dt. \qquad (5.4)
$$

.

Substituindo (5.2), (5.3) e (5.4) em (5.1), obtemos

$$
\frac{1}{2}\|w(s)\|^2 + \frac{1}{2}\mu(0)\|w_1(s)\|^2 + \int_0^s |\sqrt{\delta}\psi'|^2_{L^2(\Gamma_1)}dt \leq \frac{1}{2}\int_0^s |\mu'(t)|\|\psi(t)\|^2 dt.
$$

Logo,

$$
\frac{1}{2}\|w(s)\|^2 + \frac{1}{2}\mu(0)\|w_1(s)\|^2 \leq \frac{1}{2}\int_0^s |\mu'(t)|\|\psi(t)\|^2 dt. \qquad (5.5)
$$

Como $\psi(t) = w_1(t) - w_1(s)$ temos que $\|\psi(t)\| \leq 2(\|w_1(t)\| + \|w_1(s)\|)$, substituindo em (5.5), temos

$$
\frac{1}{2}\|w(s)\|^2 + \frac{1}{2}\mu(0)\|w_1(s)\|^2 \leq \int_0^s |\mu'(t)|^2(\|w_1(t)\|^2 + \|w_1(s)\|^2)dt.
$$

portanto,

$$
\frac{1}{2}\|w(s)\|^2 + \left(\frac{\mu_0}{2} - s\sigma_T\right)\|w_1(s)\|^2 \leq \int_0^s |\mu'(t)|\|w_1(t)\|^2 dt, \qquad (5.6)
$$

onde $\sigma_T = ess \sup\limits_{0\leq t\leq T} |\mu'(t)|$.

Seja s_0 tal que $\frac{\mu_0}{2} - s_0\sigma_T = \frac{\mu_0}{4}$. Se $0 \leq s \leq s_0$, então $\frac{\mu_0}{2} - s\sigma_T \geq \frac{\mu_0}{4}$, pois $\frac{\mu_0}{2} - s\sigma_T \geq \frac{\mu_0}{2} - s_0\sigma_T = \frac{\mu_0}{4}$. Portanto, tomando $C_1 = min\{\frac{1}{2}, \frac{\mu_0}{4}\}$ e por (5.6), obtemos:

$$
C_1(\|w(s)\|^2 + \|w_1(s)\|^2) \leq \int_0^s |\mu'(t)|\|w_1(t)\|^2 dt
$$

então,

$$\|w(s)\|^2 + \|w_1(s)\|^2 \leq \int_0^s \frac{1}{C_1}|\mu'(t)[|w(t)|^2| + \|w_1(t)\|^2]dt \tag{5.7}$$

Para todo $0 \leq s \leq s_0$, com $w(0) = w_1(0) = 0$. Pela desigualdade de Gronwall temos de (5.7) que

$$\|w(s)\|^2 + \|w_1(s)\|^2 = 0$$

e portanto,

$$w(s) = 0, \text{ sobre } [0, s_0] \tag{5.8}$$

Observe que (5.5) é válido para todo $s \in [0,T]$ e $w(s) = 0$, sobre $[0, s_0]$. Consideremos (5.5) sobre $[s_0, T]$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|w(s)\|^2 + \frac{1}{2}\mu(0)\|w_1(s)\|^2 &\leq \frac{1}{2}\int_0^s |\mu'(t)|\|\psi(t)\|^2 dt \\ &\leq \int_0^s |\mu'(t)|^2(\|w_1(t)\|^2 + \|w_1(s)\|^2)dt \\ &= \int_0^s |\mu'(t)|^2\|w_1(t)\|^2 dt + (s - s_0)\sigma_T\|w_1(s)\|^2 \end{aligned} \tag{5.9}$$

com $w(s_0) = w_1(s_0) = 0$.

Escolha $s_1 \in [s_0, T]$ tal que

$$\frac{\mu_0}{2} - (s_1 - s_0)\sigma_T = \frac{\mu_0}{4} \Longrightarrow s_1\sigma_T = 2s_0\sigma_t \Longrightarrow s_1 = 2s_0.$$

Para $s_0 \leq s \leq s_1$ temos que $\frac{\mu_0}{2} - (s - s_0)\sigma_T \geq \frac{\mu_0}{2} - (s_1 - s_0)\sigma_T = \frac{\mu_0}{4}$. Logo de (5.9) e usando a desigualdade de Gronwall da mesma maneira anterior, temos que w é igual a zero sobre $[s_0, s_1] = [s_0, 2s_0]$. Continuando o processo, obtemos que $w = 0$ sobre $[0, T], T > 0$, o que prova a unicidade da solução fraca.

5.2 Unicidade da solução forte

Suponha que existam soluções u, v nas condições do teorema (3.1). Então $w = u - v$ satisfaz as mesmas condições e $w(0) = w'(0) = 0$. Mostraremos que $w = 0$ sobre $\Omega \times [0, \infty)$.

Da equação (3.3), obtemos

$$w'' - \mu\Delta w = 0 \text{ em } L^\infty_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega)),$$

e como $w' \in L^{\infty}_{loc}(0,\infty;V) \hookrightarrow L^{\infty}_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega))$, faz sentido a seguinte dualidade:

$$(w'' - \mu\Delta w, w') = 0$$

daí,

$$(w'', w') - (\mu\Delta w, w') = 0$$

Pela segunda fórmula generalizada de Green, obtemos

$$(w''(t), w'(t)) + \mu((w(t), w'(t))) + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w(t)}{\partial \nu} w'(t) d\Gamma = 0$$

De modo semelhante ao que foi feito na primeira estimativa, obtemos

$$\begin{aligned} |w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 &+ \int_0^t \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w(s)}{\partial \nu} w'(s) d\Gamma ds \\ &\leq \frac{1}{c_1}(|w'(0)|^2 + \mu(0)\|w(0)\|^2 + \int_0^t |\mu'(s)|\|w'(s)\|^2 ds) \end{aligned}$$

Como $w(0) = w'(0) = 0$, $\int_{\Gamma_1} \frac{\partial w(s)}{\partial \nu} w'(s) d\Gamma > 0$ e considerando $C = \frac{1}{c_1}$,

$$|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 \leq 0 + \int_0^t |\mu'(s)|\|w'(s)\|^2 ds$$

Logo, pelo Lema de Gronwall, segue que

$$|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 = 0,$$

e assim $w = 0$, portanto $u = v$.

Capítulo 6

Comportamento assintótico

No capítulo 3, foi mostrado que a solução forte μ do teorema 3.1 satisfaz as seguintes condições:

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^{\infty}_{loc}(0,\infty; V \cap H^2(\Omega)), u' \in L^{\infty}_{loc}(0,\infty; V) \ e \ u'' \in L^{\infty}_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega)), \\ \mu \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \delta u' = 0 \text{ sobre } L^2(0,T; H^{1/2}(\Gamma_1)). \end{array} \right. \tag{6.1}$$

E se μ é solução fraca do teorema 4.1, tem as propriedades:

$$\left| \begin{array}{l} u' \in L^{\infty}(0,\infty; V) \ e \ u' \in L^{\infty}(0,\infty; L^2(\Omega)) \\ u'' - \mu \Delta u = 0 \text{ sobre } L^2_{loc}(0,\infty; V'). \end{array} \right. \tag{6.2}$$

Em ambos os casos se $\mu'(t) \leq 0$ q.t.p sobre $[0,\infty)$, então a energia E(t) associada a solução e descrita por:

$$E(t) = \frac{\mu}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} |u'|^2 dx \tag{6.3}$$

é não crescente. Com efeito, se considerarmos a derivada de E(t), em função de t, obtemos:

$$E'(t) = \frac{\mu'}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Gamma_1} \delta(x) u'^2 d\Gamma \leq 0$$

(ver Kormonik-Zuazua [7]).

Como $\mu'(t) \leq 0$, temos $E'(t) \leq 0$, $\forall t \in [0,\infty)$.

Neste capítulo, provaremos que a energia E(t) tem decaimento exponencial, quando t tende ao infinito. Para isto, usaremos o método da pertubação visto em Kormonik-Zuazua [7].

Inicialmente daremos uma breve introdução:

Neste capítulo o conjunto Ω e sua fronteira Γ se mantém os mesmos. Seja x^0 sendo um ponto do $\mathbb{R}^n$ e $m(x) = x - x^0$, com $x \in \mathbb{R}^n$, tal que:

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma; m(x).\nu(x) \leq 0\} \ e \ \Gamma_1 = \{x \in \Gamma; m(x).\nu(x) > 0)\}$$

Consideraremos $\delta(x) = m(x).\nu(x)$. Assim, $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1}$ é vazio, e temos que $\delta = m(x).\nu(x) \geq m_0 > 0$ sobre Γ_1. O número $\|m\|_{L^\infty(\Omega)}$ será representado por R.

Em consequência do teorema 1.1 temos a existência de $K > 0$, tal que

$$\int_{\Gamma_1} (m.\nu)v^2 d\Gamma \leq K \int_\Omega |\nabla v|^2 dx, \ \forall \ v \in V. \tag{6.4}$$

Por λ_1, representaremos o primeiro autovalor do problema espectral:

$$((w, v)) = \lambda_1(w, v), \ \forall \ v \in V \tag{6.5}$$

Teorema 6.1. *Dado $\mu \in W^{1,\infty}(0, \infty)$ com $\mu'(t) \leq 0$ sobre $(0, \infty)$. Seja $\{u_0, u_1\} \in V \times L^2(\Omega)$ e u a solução fraca correspondente a (6.2). Então a energia satisfaz:*

$$E(t) \leq CE(0)e^{\eta t}, \forall \ t \geq 0$$

onde $\eta = -\varepsilon_0 \frac{C+1}{2C}$, $C > 1$ é uma constante e

$$\varepsilon_0 = min \left\{ \frac{C-1}{C_1(C+1)}, C_2 \right\}$$

com

$$C_1 = \frac{2R + n - 1}{\mu_0} + 2R + \frac{n-1}{\lambda_1} \ e \ C_2 = \left[\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{(n-1)^2 K}{2\mu} + 1 \right]^{-1}$$

Demonstração. Trabalharemos com uma solução forte. Seja ε um número real positivo fixo e considere a pertubação de energia

$$E_\varepsilon = E(t) + \varepsilon\rho(t),$$

com

$$\rho(t) = 2(u', m\nabla u) + (n-1)(u', u).$$

portanto,

$$|\rho(t)| \le 2|u'|R|\nabla u| + (n-1)|u'||u|.$$

Observe que,

$$0 \le \left(\frac{|u'|}{\sqrt{\mu(t)}} - \sqrt{\mu(t)}|\nabla u| \right)^2 \Longrightarrow 2|u'|R|\nabla u| \le \frac{R}{\mu(t)}|u'|^2 + R\mu(t)|\nabla u|^2.$$

Portanto,

$$2|u'|R|\nabla u| \le \frac{R}{\mu(t)}|u'|^2 + R\mu(t)|\nabla u|^2 \le \left[\frac{2R}{\mu_0} + 2R \right] E(t).$$

De forma análoga ao que foi feito na equação acima e por (6.5), obtemos:

$$\begin{aligned} (n-1)|u'||u| &\le \left[\frac{|u'|^2}{2\mu} + \mu\frac{|u|^2}{2} \right] \\ &\le \frac{(n-1)}{\mu_0}\frac{|u'|^2}{2} + \mu\frac{(n-1)}{\lambda_1}\frac{|\nabla u|^2}{2} \\ &\le \left[\frac{n-1}{\mu_0} + \frac{n-1}{\lambda_1} \right] E(t) \end{aligned}$$

Segue que

$$|\rho(t)| \le C_1 E(t), \text{ com } C_1 = \frac{2R+n-1}{\mu_0} + 2R + \frac{n-1}{\lambda_1}$$

e

$$|E_\varepsilon(t) - E(t)| \le \varepsilon|\rho(t)| \le \varepsilon C_1 E(t)$$

ou

$$-\varepsilon C_1 E(t) \le \varepsilon\rho(t) \le \varepsilon C_1 E(t) \Rightarrow (1-\varepsilon C_1)E(t) \le E_\varepsilon(t) \le (1+\varepsilon C_1)E(t). \tag{6.6}$$

Considere agora

$$\varepsilon_0 = min\left\{ \frac{C-1}{C_1(C+1)}, C_2 \right\} \text{ com } C_2 = \left[\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{(n-1)^2K}{2\mu} + 1 \right]^{-1}$$

e $C > 1$ qualquer número real.

Se considerarmos $\varepsilon = \varepsilon_0$, nos temos que

$$\begin{aligned} \varepsilon \le \frac{C-1}{C_1(C+1)} &\Longrightarrow -\varepsilon C_1 \ge \frac{1-C}{C+1} \\ &\Longrightarrow 1-\varepsilon C_1 \ge \frac{1-C}{C+1} + 1 \\ &\Longrightarrow 1-\varepsilon C_1 \ge \frac{2}{C+1} \end{aligned} \tag{6.7}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\varepsilon \leq \frac{C-1}{C_1(C+1)} \quad &\Longrightarrow \quad 1+\varepsilon C_1 \leq \frac{C-1}{C+1}+1 \\ &\Longrightarrow \quad 1+\varepsilon C_1 \leq \frac{2C}{C+1}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Substituindo (6.17) e (6.18) na desigualdade (6.6), obtemos:

$$\frac{2}{(C+1)}E(t) \leq E_\varepsilon(t) \leq \frac{2C}{(C+1)}E(t), \forall\ t \geq 0. \tag{6.9}$$

que implica,

$$\frac{C+1}{2C}E_\varepsilon(t) \leq E(t),\ \forall\ t \geq 0. \tag{6.10}$$

Notando que $\mu'(t) \leq 0$ sobre $[0,\infty)$, obtemos:

$$\begin{aligned} E'_\varepsilon(t) &= E'(t)+\varepsilon\rho'(t) \\ &= \frac{\mu'(t)}{2}\int_\Omega |\nabla(t)|^2dx - \int_{\Gamma_1}(m.\nu)u'^2(t)d\Gamma + \varepsilon\rho'(t) \\ &\leq -\int_{\Gamma_1}(m.\nu)u'^2(t)d\Gamma + \varepsilon\rho'(t) \end{aligned} \tag{6.11}$$

Considerando $u'' = \mu\Delta u$ e usando a segunda fórmula de Green generalizada (proposição 7.3), temos que:

$$\begin{aligned} \rho'(t) &= 2\mu(\Delta u, m.\nabla u) + 2(u', m\nabla u') + (n-1)(u',u') - \\ &- (n-1)\mu(\nabla u, \nabla u) + (n-1)\mu\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, u\right)_{L^2(\Gamma_1).} \end{aligned}$$

Agora estimaremos $|\rho'(t)|$ em função de E(t). Para isto, analisaremos cada termo na equação acima.

PASSO 1: Análise de $(\Delta u, m.\nabla u)$.

Inicialmente observemos que,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}m_j\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(m_j\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}m_j\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Então, usando o teorema da divergência de Gauss (proposição 7.8), temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}m_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}dx &= -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(m_j\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}m_j\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx \\ &= -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(m_j\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i}m_j\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j d\Gamma \\ &= -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial m_j}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}m_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i}m_j\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j d\Gamma \end{aligned}$$

Logo,

$$-\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} m_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial m_j}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j d\Gamma \tag{6.12}$$

Por outro lado, usando o a segunda fórmula de Green generalizada,

$$\begin{aligned}
(\Delta u, m.\nabla u) &= \int_\Omega \Delta u m.\nabla u dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \qquad (6.13) \\
&= -\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(m_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i,j=1}^n \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_j d\Gamma \\
&= -\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial m_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} dx - \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} m_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx + \sum_{i,j=1}^n \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_j d\Gamma
\end{aligned}$$

Substituindo (6.12), em (6.19) obtemos que:

$$\begin{aligned}
(\Delta u, m.\nabla u) = &- \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial m_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial m_j}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} dx \\
&- \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j d\Gamma + \sum_{i,j=1}^n \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_j d\Gamma
\end{aligned}$$

PASSO 2: Análise de $(u', m.\nabla u')$.

Pelo teorema da divergência de Gauss, obtemos

$$\begin{aligned}
(u', m.\nabla u') &= \int_\Omega u' m \nabla u dx \\
&= \int_\Omega u' \sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial u}{x_j} dx \\
&= \sum_{j=1}^n \int_\Omega u' m_j \frac{\partial u'}{\partial x_j} dx = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \int_\Omega m_j \frac{\partial}{\partial x_j} u'^2 dx \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial m_j}{\partial x_j} u'^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(m_j u'^2) dx \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial m_j}{\partial x_j} u'^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_1} m_j \nu_j u'^2 dx
\end{aligned}$$

Dos passos 1 e 2, obtemos

$$
\begin{aligned}
\rho'(t) &= -2\mu \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial m_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \mu \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\partial m_j}{\partial x_j} dx \\
&+ 2\mu \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i d\Gamma - \mu \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_j d\Gamma \\
&- \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial m_j}{\partial x_j} u'^2 dx + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_j \nu_j u'^2 dx + (n-1)(u', u') \\
&- \mu(n-1)(\nabla u, \nabla u) + \mu(n-1) \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} u d\Gamma
\end{aligned}
$$

Observando que u é zero sobre Γ_0 e $\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} = -(m.\nu)u'$ sobre Γ_1, obtemos,

$$
\begin{aligned}
\rho'(t) = &- 2\mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + n\mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \\
&+ 2\mu \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i d\Gamma - \mu \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma} m_j \nu_j \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Gamma \\
&- n \int_{\Omega} u'^2 dx + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_j \nu_j u'^2 dx + (n-1) \int_{\Omega} u'^2 dx \\
&- \mu(n-1)|\nabla u|^2 - (n-1) \int_{\Gamma_1} (m.\nu) u' u d\Gamma \\
&= \mu(n-2)|\nabla u|^2 + 2\mu \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i d\Gamma - \mu \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma} m_j \nu_j \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Gamma \\
&- \int_{\Omega} u'^2 dx + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_j \nu_j u'^2 dx \\
&- \mu(n-1)|\nabla u|^2 - (n-1) \int_{\Gamma_1} (m.\nu) u' u d\Gamma \\
&= -\mu|\nabla u|^2 - \int_{\Omega} u' dx + 2\mu \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i m_j \frac{\partial u}{\partial x_j} d\Gamma \\
&- \mu \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma} m_j \nu_j \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Gamma - (n-1) \int_{\Gamma_1} (m.\nu) u' u d\Gamma + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_j . \nu_j u'^2 d\Gamma
\end{aligned}
$$

PASSO 3: Análise de $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i m_j \frac{\partial u}{\partial x_j} d\Gamma$

Como $\frac{\partial u}{\partial x_j} = \nu_j \frac{\partial u}{\partial \nu}$ em Γ_0 e $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$, temos que

$$\begin{aligned}
2\mu \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i m_j \frac{\partial u}{\partial x_j} d\Gamma &= 2\mu \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} m_j \frac{\partial u}{\partial x_j} d\Gamma \\
&= 2\mu \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} m_j \frac{\partial u}{\partial x_j} d\Gamma + 2\mu \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} m_j \frac{\partial u}{\partial x_j} d\Gamma \\
&= 2\mu \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} m_j \nu_j \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma + 2 \sum_{j,k=1}^{n} \int_{\Gamma_1} (-m_k, \nu_k) u' m_j \frac{\partial u}{\partial x_j} d\Gamma
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left| 2 \sum_{j,k=1}^{n} \int_{\Gamma_1} (-m_k \nu_k) m_j \frac{\partial u}{\partial x_j} d\Gamma \right| &\leq 2 \sum_{j,k=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_k \nu_k |u'| R \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| d\Gamma \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_k \nu_k |u'| R \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right)^{1/2} d\Gamma \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_k \nu_k R \left\{ \frac{R}{\mu} |u'|^2 + \frac{\mu}{R} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right\} d\Gamma \\
&\leq \frac{R^2}{\mu_0} \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_k \nu_k u'^2 d\Gamma + \mu \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_k \nu_k \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 d\Gamma
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
2\mu \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i m_j \frac{\partial u}{\partial x_j} d\Gamma \leq \quad & 2\mu \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_0} m_j \nu_j \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma + \frac{R^2}{\mu_0} \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_k, \nu_k u'^2 d\Gamma \\
+ \quad & \mu \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_k \nu_k \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 d\Gamma
\end{aligned}$$

PASSO 4: Análise de $-\mu \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma} m_j \nu_j \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) d\Gamma.$

Como $\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2$ sobre Γ_0, obtemos

$$-\mu \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma} m_j \nu_j \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Gamma = -\mu \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_0} m_j \nu_j \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Gamma$$

$$
\begin{aligned}
& -\mu \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_j \nu_j \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Gamma \\
= & -\mu \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_0} m_j \nu_j \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma - \mu \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_j \nu_j \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Gamma
\end{aligned}
$$

PASSO 5: Análise de $(n-1) \int_\Gamma (m.\nu) u' u d\Gamma$.

Temos que,

$$
-(n-1) \int_{\Gamma_1} (m.\nu) u' u d\Gamma \leq (n-1) \left[\int_{\Gamma_1} \frac{(n-1)K}{\mu} (m.\nu) \frac{u'^2}{2} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \frac{\mu}{(n-1)K} (m.\nu) \frac{u^2}{2} d\Gamma \right],
$$

onde K é proveniente de (6.4). Então,

$$
\begin{aligned}
-(n-1) \int_{\Gamma} (m.v) u' u d\Gamma & \leq \left[\int_{\Gamma_1} \frac{(n-1)^2 K}{\mu_0} (m.\nu) \frac{u'^2}{2} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \frac{\mu}{K} (m.\nu) \frac{u^2}{2} d\Gamma \right] \\
& \leq \frac{(n-1)^2 K}{2\mu_0} \int_{\Gamma_1} (m.\nu) u'^2 d\Gamma + \frac{\mu}{2} |\nabla u|^2.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
-(n-1) \int_{\Gamma} (m.\nu) u' u d\Gamma \leq \frac{(n-1)^2 K}{2\mu_0} \int_{\Gamma_1} (m.\nu) u'^2 d\Gamma + E(t).
$$

Dos passos 3, 4 e 5, obtemos

$$
\begin{aligned}
\rho'(t) = & -\mu |\nabla u|^2 - \int_\Omega u' dx + 2\mu \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i m_j \frac{\partial u}{\partial x_j} d\Gamma \\
& -\mu \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Gamma m_j \nu_j \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Gamma - (n-1) \int_{\Gamma_1} (m.\nu) u' u d\Gamma + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_j . \nu_j u'^2 d\Gamma \\
\leq & -2E(t) + 2\mu \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_0} m_j \nu_j \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma + \frac{R^2}{\mu_0} \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_k \nu_k u'^2 d\Gamma \\
& +\mu \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_k \nu_k \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 d\Gamma - \mu \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_0} m_j \nu_j \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma - \mu \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_j \nu_j \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Gamma \\
& + \frac{(n-1)^2 K}{2\mu_0} \int_{\Gamma_1} (m.\nu) u'^2 d\Gamma + E(t) + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_j \nu_j u'^2 d\Gamma \\
= & -E(t) + \mu \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_0} m_j \nu_j \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma + \left\{ \frac{R^2}{\mu_0} + \frac{(n-1)^2 K}{2\mu_0} + 1 \right\} \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_j \nu_j u'^2 d\Gamma.
\end{aligned}
$$

Multiplicando ambos os membros por ε e como $\sum_{j=1}^{n} m_j \nu_j = m\nu \leq 0$ sobre Γ_0, temos que

$$\varepsilon\rho'(t) \leq -\varepsilon E(t) + \varepsilon \left\{ \frac{R^2}{\mu_0} + \frac{(n-1)^2 K}{2\mu_0} + 1 \right\} \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} m_j \nu_j u'^2 d\Gamma$$

Substituindo em (6.11), obtemos

$$E'_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon E(t) - \left\{ 1 - \varepsilon \left[\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{(n-1)^2 K}{2\mu_0} + 1 \right] \right\} \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} (m\nu) u'^2 d\Gamma \tag{6.14}$$

Se $\varepsilon = \varepsilon_0$, obtemos pela definição de ε_0:

$$0 < \varepsilon < C_2 = \left[\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{(n-1)^2 K}{2\mu_0} + 1 \right]^{-1}$$

Logo,

$$\left\{ 1 - \varepsilon \left[\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{(n-1)^2 K}{2\mu_0} K + 1 \right] \right\} \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} (m\nu) u'^2 d\Gamma \geq 0$$

já que $m\nu > 0$ sobre Γ_1 e portanto temos de (6.14) que

$$E'_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon E(t)$$

e de (6.10), temos que

$$-\varepsilon \frac{C+1}{2C} E_\varepsilon(t) \geq -\varepsilon E(t)$$

Então,

$$E'_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon \frac{C+1}{2C} E_\varepsilon(t),$$

Logo,

$$E_\varepsilon(t) \leq E(0) e^{-\varepsilon \frac{C+1}{2C} t} \ \forall \ t \geq 0 \tag{6.15}$$

De (6.10), temos que

$$E_\varepsilon(0) \leq \frac{2C}{C+1} E(0)$$

e de (6.9):

$$\frac{2}{C+1} E(t) \leq E_\varepsilon(t).$$

Assim, de (6.15) temos

$$E(t) \leq C E(0) e^{-\varepsilon_0 \frac{C+1}{2C} t}, \ \forall \ t \geq 0 \tag{6.16}$$

□

Logo, o decaimento exponencial (6.16) é válido para soluções fortes.

Para cada $p \in \mathbb{N}$ *tem se*

$$\begin{aligned} & E_p(t) = \frac{\mu}{2}\|u_p\|^2 + \frac{1}{2}|u_p'|^2 \text{ e } E_p(t) \leq CE_p(0)e^{-\eta t}, \forall t > 0, \\ & u_p \longrightarrow u \text{ forte em } C^0([0,T];V), \\ & u_p' \longrightarrow u' \text{ forte em } C^0([0,T];L^2(\Omega)), \end{aligned} \tag{6.17}$$

onde u é a solução fraca obtida por meio do teorema 4.1.

Como

$$\|u_p(t) - u(t)\| \leq sup\|u_p(t) - u(t)\| = \|u_p - u\|_{C^0([0,T];V)} \longrightarrow 0.$$

Então,

$$u_p(t) \longrightarrow u(t) \text{ em } V, \forall t \in [0,T] \tag{6.18}$$

De maneira análoga, obtemos

$$u_p'(t) \longrightarrow u'(t) \text{ em } L^2(\Omega), \forall t \in [0,T] \tag{6.19}$$

Usando as convergências (6.18) e (6.19), podemos passar o limite em (6.17), e obter

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\eta t}, \forall t > 0$$

Portanto, temos o mesmo comportamento pra soluções fracas.

Capítulo 7

Apêndice

Proposição 7.1. ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Suponhamos que Ω é um aberto limitado em alguma direção x_i. Então, existe uma constante $C = C(\Omega)$tal que:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Em particular, a expressão é uma norma equivalente em $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Demonstração. Para demonstração, ver [1], página 290. □

Proposição 7.2. ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Demonstração. Para demonstração ver [1], página 92. □

Lema 7.1. ***(Lax-Milgran)*** *Seja $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva sobre H. Então dado $\varphi \in H'$ (espaço dual de H) existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \langle\varphi, v\rangle,\ \forall\ v \in H$$

Além do mais, se a é simétrico, então u é caracterizado pela seguinte propriedade:

$$u \in H \text{ e } \frac{1}{2}a(u, u) - \langle\varphi, u\rangle = \min_{v\in H}\left\{\frac{1}{2}a(v, v) - \langle\varphi, v\rangle\right\}.$$

Demonstração. Para demonstração ver [1], página 140. □

Consideremos,

$$\mathcal{H}^{\alpha}(\Omega) = \{u \in H^{\alpha}(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

munido do produto interno natural

$$(u, v)_{\alpha} = ((u, v))_{H^{\alpha}(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}$$

Proposição 7.3. ***(Segunda Fórmula de Green Generalizada)***

Para todo $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ e todo $v \in H^1(\Omega)$, tem-se:

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_1) \times H^{1/2}(\Gamma_1)}$$

Demonstração. Para demonstração ver [2], página 413. □

Teorema 7.1. ***(Representação de Riesz)*** *Sejam $1 < p < \infty$ e $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. Então, existe um único $u \in L^p(\Omega)$, tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_{\Omega} u f dx, \ \forall f \in L^p(\Omega).$$

Além disso, verifica-se que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}$$

Demonstração. Para demonstração ver [1], página 97. □

Consideremos o problema de valor inicial

$$\left| \begin{array}{l} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. \tag{7.1}$$

Definição 7.1. *Dizemos que $f : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições do teorema de Caratheódory sobre $\Omega \times [0, T]$ se:*

1. *$f(x, t)$ é mensuravel em t para cada x fixo;*

2. *$f(x, t)$ é contínua em x para cada t fixo;*

3. *Para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_k(t)$, integrável, tal que*

$$\|f(x, t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_k(t), \forall (x, t) \in K.$$

Teorema 7.2. ***(Teorema de Carathéodory)*** *Consideremos o problema de valor inicial*

$$\left| \begin{array}{l} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

Seja $f : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre Ω. Então, existe uma solução $x(t)$ de (7.1) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, onde $\beta > 0$ é uma constante positiva.

Demonstração. Para demonstração ver [12], página 39 ou [3]. □

Teorema 7.3. ***(Teorema do Prolongamento)*** *Seja $\Omega = B \times [0,T]$ com $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq b\}$, onde $b > 0$ é uma constante positiva e $\|.\|$ a norma euclidiana do $\mathbb{R}^n$. Suponha que f é uma função que satisfaz as duas primeiras condições do teorema de Carathéodory e que exista uma função $m(t)$ integrável tal que*

$$|f(x,t)| \leq m(t), m(t) \in L(0,T), \forall (x,t) \in \Omega.$$

Seja $x(t)$ uma solução de (7.1) e suponha que $x(t)$ está definida em I, satisfazendo $|x(t)| \leq M$, M independente de I e $M < b$ para todo $t \in I$. Então, $x(t)$ pode ser prolongada à todo intervalo $[0,T]$.

Demonstração. Para demonstração ver [3]. □

Teorema 7.4. ***(Desigualdade de Gronwall)*** *Sejam $c \geq 0$ uma constante não negativa, $u \geq 0$ q.s em (s,T) uma função integrável em (s,T) e $\varphi : [s,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e não negativa tal que*

$$\varphi(t) \leq c + \int_s^t u(\tau)\varphi(\tau)d\tau, \forall t \in [s,T].$$

Então,

$$\varphi(t) \leq ce^{\int_s^t u(\tau)d\tau}, \forall t \in [s,T].$$

Demonstração. Para demonstração ver [12], página 36. □

Proposição 7.4. *Seja $u \in L^2(0,T,X)$. Então existe um único $f \in H^{-1}(0,T,X)$, que verifica*

$$\langle f, \theta\xi \rangle = (\langle u', \theta \rangle)_X, \forall \theta \in D(0,T), \forall \xi \in X$$

Demonstração. Para demonstração ver [13]. □

Proposição 7.5. *Seja X sendo um espaço de Banach com dual X' e sejam u e g duas funções pertencentes $L^1(a,b,X)$. Então, as três condições abaixo são equivalentes:*

1. *u é igual q.t.p a função primitiva de g;*

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)ds, \ \xi \in X, \ q.t.p, \ t \in [a,b]$$

2. *Para cada função teste $\phi \in D(a,b)$,*

$$\int_a^b u(t)\phi'(t)dt = -\int_a^b g(t)\phi(t)dt$$

3. *Para cada $\eta \in X'$,*

$$\frac{d}{dt}\langle u, \eta\rangle = \langle g, \eta\rangle.$$

Demonstração. Para demonstração ver [17], página 250. □

Proposição 7.6. *Seja Ω um subconjunto aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Então, as seguintes imersões são compactas:*

1. $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$; $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$ *se* $p < n$.

2. $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega); 1 \leq q < +\infty$ *se* $p = n$.

3. $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$; *se* $p > n$.

Demonstração. Para demonstração ver [2], página 214. □

Proposição 7.7. *A aplicação traço $u \in \mathcal{H}^\alpha \longrightarrow \gamma u = \{\gamma_0 u, \gamma_1 u\} \in H^{(-1/2)+\alpha}(\Gamma) \times H^{(-3/2)+\alpha}(\Gamma)$ para $0 \leq \alpha \leq 2$, é linear e contínua, onde $\mathcal{H}^\alpha = \{u \in H^\alpha(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$. Tem-se a seguinte Fórmula de Green*

$$(-\Delta u, v) = (u, -\Delta v) - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v\rangle_{H^{(-3/2)+\alpha}(\Gamma), H^{(3/2)+\alpha}(\Gamma)} + \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v\rangle_{H^{(-1/2)+\alpha}(\Gamma), H^{(3/2)+\alpha}(\Gamma)}$$

para $0 \leq \alpha \leq 2, u \in \mathcal{H}^\alpha$ e $v \in \mathcal{H}^{2-\alpha}$.

Demonstração. Para demonstração ver [15], página 145. □

Proposição 7.8. *Seja X um campo no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ e $\Omega \subset U$ aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular de classe C^k. Então,*

$$\int_{\partial\Omega} \langle X, v \rangle dM = \int_{\Omega} divX dx$$

Demonstração. Para demonstração ver [8], página 493. $\square$

Proposição 7.9. ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam $p, q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \ \forall \ a \geq 0 \ e \ \forall \ b \geq 0.$$

Demonstração. Para demonstração ver [1], página 92. $\square$

Teorema 7.5. *Se V é um espaço com produto interno, então para qualquer vetor α e $\beta \in V$ e qualquer escalar c*

1. $\|c\alpha\| = |c|\|\alpha\|$;

2. $\|\alpha\| > 0$ *para* $\alpha \neq 0$;

3.$|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\|\|\beta\|$;

4. $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$.

*A desigualdade **(3.)** é chamada de desigualdade de Cauchy-Schwarz*

Demonstração. Para demonstração ver [5], página 278. $\square$

Proposição 7.10. *Sejam X e Y espaços de Banach tais que $X \hookrightarrow Y$. Seja*

$$W^1(0, T; X, Y) = \{u \in L^1(0, T; X) : u' \in L^1(0, T; Y)\}.$$

Então, $W^1(0, T; X, Y)$ com a norma $\|u\|_{W^1(0,T;X,Y)} = \|u\|_{L^1(0,T;X)} + \|u\|_{L^1(0,T;Y)}$ é um espaço de Banach. Além disso,

$$W^1(0, T; X, Y) \hookrightarrow C([0, T]; Y)$$

Demonstração. Para demonstração ver [12], página 29. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] BREZIS, H.*Functional Analysis,Sobolev Spaces and Partial Differential Equations* .2010, Springer: USA.

[2] CAVALCANTI, M, e , CAVALCANTI, V. *Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev.* Maringá: UEM, 2009.

[3] CODDINGTON, E, and, LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations.* MeGrall-Hill. New York, (1955).

[4] FOLLAND, B. *Modern Techniques and their Applications.*John Wiley & Sons Inc.USA, 1999.

[5] HOFFMAN, K,.KUNZE, R. *Linear Algebra.* Prentice-Hall, inc. New Jersey.(1971).

[6] KESAVAN, S. *Topics in Functional Analysis and Applications* . John Wiley & Sons Inc.India, (1989).

[7] KOMORNIK, V.,ZUAZUA,E., *A Direct Method for Boundary Stabilization of the Wave Equation.* J. Math. Pure et Appl. 69,(1990), 33-54.

[8] LIMA, ELON LAGES. *Curso de análise.*vol 2.ISBN,Rio de Janeiro: IMPA, (2006).

[9] LIONS, J,L.,*Quelques Méthodes de Résolution des problémes aux limites Non-Linéares* ,Dunod, Paris, 1969.

[10] LIONS, J.L. *Problèmes aux limites dans les Équations aux Dérivees Partielles, Les Presses de l'Université de Montreal, Montreal, Canada, 1965.*. J. Math. Pure et Appl. 69,(1990), 33-54.

[11] LIONS, J,L., MAGENES, E. *Problémes aux Limites non Homogènes, Aplications 1*,Dunod, Paris, 1968.

[12] LOUREDO,A,T.*Lições de Equações Diferenciais Parciais e Estabilização.*Notas de aula. Campina Grande, UEPB, 2013.

[13] M, MILLA MIRANDA., *Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev*,Bol.Soc.Paran.Matemática(2^o série) 11(2),(1990),131-157.

[14] M, MILLA MIRANDA e MEDEIROS, L.A *On a boundary value problem for wave equations: Existence-uniqueness-asymptotic behavior*,Rev. de Mat. Appl. Univ. de Chile 17(1996), 47-73.

[15] M, MILLA MIRANDA e MEDEIROS, L.A *Espaços de Sobolev e Equações diferenciais parciais*,Textos de Métodos Matemáticos,vol. 28,IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1994).

[16] M, MILLA MIRANDA. *Análise Espectral em Espaços de Hilbert*, Editora Livraria da Física,EdUEPB, Campo Grande-PB, (2013).

[17] TEMAN, R. *Navier-Stokes Equations(Theory and Numerical Analysis)*,North Holland,Amsterdam,1974.

[18] PAZ, L,A . A.,*Existência de Solução e estabilidade na fronteira da equação da onda semilinear*, Dissertação.Campinas Grande,2012.

[19] VISIK, M.I., LADYZHENSKAYA, O.A.,*Boundary Value Problem for partial Differential Equations and Certain classes of Operator Equations*,A.M.S. Translations Serie 2 10, (1985), 223-281.

[20] STRAUSS, W.A.,*On weak solutions of semilinear hyperbolic equations*, An. Acad. Brasil. Ciênc. 42(1970), 645-651.